На правах рукописи

БЕЛОВ Алексей Анатольевич

Методы и алгоритмы анизотропийного управления линейными дескрипторными и параметрически неопределенными системами

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук (ИПУ РАН)

Научный консультант: **Чайковский Михаил Михайлович**, доктор технических наук.

Официальные оппоненты: **Пакшин Павел Владимирович**, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики, Арзамасский политехнический институт (филиал) ФГБОУ ВО “Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева.”

Семенихин Константин Владимирович, д.ф.-м.н., профессор кафедры “Теория вероятностей”, ФГБОУ ВО “Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет).”

Маликов Александр Иванович, д.ф.-м.н., профессор кафедры “Автоматика и управление”, ФГБОУ ВО Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева - КАИ.

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО “Санкт-Петербургский государственный университет.”**

Защита диссертации состоится **19 сентября 2022 года** в **14:00** на заседании диссертационного совета Д002.226.02 при Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН по адресу: 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 65, ИПУ РАН.

С диссертацией можно ознакомиться на сайте Института проблем управления РАН (https://www.ipu.ru/).

Автореферат разослан “___” ____________ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д002.226.02,
кандидат физико-математических наук Мусатова Е.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Задачи подавления внешних возмущений, действующих на объект управления, являются чрезвычайно важными в теории автоматического регулирования. Реальные технические объекты управления, как правило, функционируют в условиях неопределенностей, связанных как с неизвестными заранее и неизмеряемыми возмущениями, так и со случайными ошибками измерения. Для решения задач подавления возмущений в теории управления применяются разнообразные подходы. Среди подобных подходов можно выделить геометрические подходы, компенсационные подходы, а также методы минимизации влияния определенного класса возмущений на управляемый выход системы. В последнем случае подавление влияния внешних возмущений может быть реализовано для некоторого наперед заданного множества сигналов без его измерения. Такие подходы заключаются в минимизации операторной нормы от возмущающего воздействия к управляемому выходу. В классе линейных систем к наиболее популярным методам минимизации операторной нормы от возмущающего воздействия к управляемому выходу относятся LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ подходы.

Минимизация того или иного критерия качества позволяет наилучшим образом подавлять заданный класс внешних возмущений, действующих на систему. Так, LQG/$\mathcal{H}_2$ регулятор позволяет наилучшим образом минимизировать среднеквадратичное отклонение выходной переменной системы, на которую действует гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. В случае $\mathcal{H}_\infty$ управления минимизируется максимальная (по всему диапазону частот) операторная норма передаточной матрицы (как коэффициент усиления внешнего возмущающего воздействия). Анизотропийный подход к управлению линейными системами, предложенный И.Г. Владимировым, изучает возможности подавления системой случайных внешних возмущений с неточно заданными статистическими характеристиками. В отличие от LQG/$\mathcal{H}_2$ подхода, анизотропийная теория управления учитывает окрашенность случайного входного возмущения. Мерой окрашенности выступает неотрицательное число, называемое средней анизотропией, которая используется для теоретико-информационного (или энтропийного) описания статистической неопределенности в отношении случайных шумов. При этом случаи LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ управления могут рассматриваться как частные предельные случаи анизотропийной теории.

Системы управления, замкнутые анизотропийными регуляторами, являются более робастными, чем системы, замкнутые LQG/$\mathcal{H}_2$ регуляторами, и менее консервативными, чем системы, замкнутые $\mathcal{H}_\infty$ регуляторами. В работе А.П. Курдюкова, И.Г. Владимирова и В.Н. Тимина рассматривались сравнения возможностей LQG/$\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ и анизотропийных регуляторов в задаче подавления внешнего возмущения типа сдвига ветра при посадке самолета в присутствии случайных окрашенных шумов измерений. Было показано, что применение анизотропийных регуляторов при управлении дискретными системами существенно уменьшает энергетические затраты на управление за счет учета статистической неопределенности случайного внешнего возмущения, не снижая при этом качества переходных процессов.

Учитывая все преимущества анизотропийного подхода к синтезу робастных регуляторов, дальнейшее развитие методов анизотропийного анализа и управления для новых классов линейных систем является важной и актуальной задачей. Среди таких систем следует выделить классы дескрипторных и параметрически неопределенных обыкновенных систем (здесь и далее обыкновенными будем называть системы, описываемые только дифференциальными или только разностными уравнениями). Математические модели дескрипторных систем получаются, если в качестве переменных состояния выбирать реальные физические величины. Такой подход с одной стороны приводит к упрощению составления моделей и интерпретации результатов моделирования, но с другой стороны может приводить к появлению алгебраических уравнений вместе с дифференциальными или разностными уравнениями.

Дескрипторные системы нашли свое приложение при моделировании движения летательных аппаратов, химических процессов, в схемотехнике, в экономических системах, технических системах, энергетических системах, а также для описания механических систем и в робототехнике. Дескрипторные системы имеют характерные особенности и отличия от обыкновенных систем, которые не позволяют напрямую обобщить существующие методы и подходы теории управления, разработанные для обыкновенных систем. Несмотря на эти особенности, исследование дескрипторных систем представляет достаточно перспективное направление как с точки зрения фундаментальных исследований, так и с точки зрения практического применения.

Резюмируя вышесказанное, можно сделать вывод, что актуальность развития анизотропийной теории и разработка новых методов анизотропийного анализа и синтеза робастных регуляторов для новых классов не вызывает сомнений. Эти методы позволяют обобщать в рамках единого подхода разрозненные существующие и появляющиеся в настоящий момент результаты анализа и синтеза LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ регуляторов для линейных систем, как обыкновенных (задаваемых разносными уравнениями), так и дескрипторных (алгебро-разностных) систем.

Степень научной разработанности темы

Первые результаты, касающиеся анизотропийного анализа и синтеза линейных стационарных систем восходят к работам А.П. Курдюкова, И.Г. Владимирова и А.В. Семенова. В этих работах рассматривались и были решены задачи анизотропийного анализа и синтеза оптимальных анизотропийных регуляторов по выходу на основе техники уравнений Риккати. Несмотря на решение оптимальной задачи, численная реализация разработанных методов была трудоемкой и требовала достаточно большое количество предположений об исходном объекте управления. Преодолеть эти недостатки стало возможным с появлением методов субоптимального анизотропийного управления, полученных в работах М.М. Чайковского и А.П. Курдюкова. Методы субоптимального управления строились на основе выпуклой оптимизации и позволили легко реализовать численные алгоритмы синтеза субоптимальных регуляторов как по выходу, так и по состоянию. Что касается робастных задач, в которых объект управления имеет параметрические неопределенности, то такие рассматривались в работах Е.А. Максимова, А.П. Курдюкова и М.М. Чайковского. В качестве параметрических неопределенностей были рассмотрены дробно-линейные и частный случай ограниченных по норме неопределенностей. Решения синтеза робастных субоптимальных регуляторов включали в себя как использование техники Риккати, так и подходы на основе выпуклой оптимизации. Отдельно следует упомянуть решения задач фильтрации, полученные в работах М.М. Чайковского, А.П. Курдюкова и В.Н. Тимина.

Объектом исследования выступают линейные стационарные системы, заданные в пространстве состояний в дескрипторной и обыкновенной форме. На вход данных систем поступает внешнее возмущение, о котором известна принадлежность его к некоторому множеству сигналов.

Предметом исследования является стабилизация описанных выше систем с одновременным понижением влияния внешних возмущений.

Целями данного диссертационного исследования являются разработка новых методов анализа и синтеза для класса линейных дескрипторных систем на основе ани-зотропийного подхода к описанию внешних возмущений и распространение ме-тодов анизотропийной теории управления на некоторые классы параметрически неопределенных обыкновенных систем.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Для линейных дискретных допустимых дескрипторных систем требуется получить аналитические условия, позволяющие оценить величину анизотропийной нормы системы во временной области.

2. Для линейных дискретных дескрипторных систем необходимо разработать методы синтеза оптимальных анизотропийных законов управления при полном и неполном измерении вектора состояния, которые делают замкнутую систему допустимой и минимизируют ее анизотропийную норму от возмущения к управляемому выходу.

3. Для линейных дискретных дескрипторных систем требуется разработать методы синтеза субоптимальных регуляторов по состоянию, которые делают замкнутую систему допустимой и гарантируют ограниченность ее анизотропийной нормы.

4. Требуется разработать аналитические методы робастного анизотропийного анализа и синтеза субоптимальных законов управления по состоянию для линейных дискретных дескрипторных систем с параметрически-ми ограниченными по норме неопределенностями.

5. Требуется разработать аналитические методы робастного анизотропийного анализа линейных дискретных обыкновенных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями.

6. Для линейныйх дискретных обыкновенных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями необходимо разработать методы синтеза субоптимальных анизотропийных регуляторов, гарантирующих робастную устойчивость замкнутых систем, а также ограничивающих величину анизотропийной нормы от возмущения к управляемому выходу.

Научная новизна заключается в распространении методов анизотропийной теории управления на дескрипторные системы и на некоторые классы параметрически неопределенных обыкновенных систем. Результаты, полученные в диссертационной работе, постановки задач и методы их решения являются новыми в анизотропийной теории управления. К основным новым результатам относятся следующие:

1. Разработаны методы анизотропийного анализа и вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с использованием обобщенных алгебраических уравнений Риккати и методов выпуклой оптимизации.

2. Для дескрипторных систем получены формулы для вычисления оптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати.

3. Для класса дескрипторных систем разработаны методы синтеза субоптимального анизотропийного управления при полном измерении вектора состояния.

4. Для класса дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями были разработаны методы робастного анизотропийного и $\mathcal{H}_\infty$ анализа и синтеза анизотропийного и $\mathcal{H}_\infty$ управления.

5. Решены задачи робастного анизотропийного анализа и управления для класса обыкновенных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями с использованием техники выпуклой оптимизации.

6. Были разработаны методы робастного анизотропийного анализа и синтеза робастного анизотропийного управления для политопических систем.

Теоретическая значимость Обобщение анизотропийного подхода на класс дескрипторных систем позволило объединить в рамках единой теории методы анализа и синтеза линейных систем, использующих в виде критерия качества норму вход-выходного оператора системы. Таким образом, в рамках общей концепции удалось объединить разрозненные до настоящего момента методы $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ теорий для дескрипторных систем как частные случаи анизотропийного подхода, а также рассматривать обыкновенные системы как частный случай дескрипторных систем. Впервые методы выпуклой оптимизации были применены для анализа и синтеза робастных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями.

Практическая значимость. Полученные в диссертационном исследовании методы анализа и синтеза робастных систем автоматического управления с точно известными параметрами позволяют снизить консерватизм замкнутых систем по сравнению с $\mathcal{H}_\infty$ регуляторами, повышая робастность по отношению к статистическим неопределенностям в распределениях случайных возмущений. Такие регуляторы могут заметно уменьшить энергозатраты на управление и продлить время автономной работы замкнутых систем за счет более тонкой настройки закона управления. Методы анализа и синтеза анизотропийного управления для систем с неточно заданными параметрами позволяют повысить робастное качество замкнутых систем в условиях параметрической неопределенности объектов управления, вызванных неточно известной математической моделью или технологическими допусками при производстве компонент объектов управления.

Соответствие паспорту специальности. Работа соответствует специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)» по пунктам:

- П.1. Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- П.2. Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- П.4. Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- П.8. Теоретико-множественный и теоретико-информационный анализ сложных систем.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методы анизотропийного анализа и синтеза оптимального и субоптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати, а также с использованием выпуклой оптимизации.

2. Методы робастного анизотропийного и $\mathcal{H}_\infty$ анализа и синтеза робастного анизотропийного и $\mathcal{H}_\infty$ управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

3. Методы робастного анизотропийного анализа и синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями на основе методов выпуклой оптимизации.

4. Методы робастного анизотропийного анализа и синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с политопическими параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

Методы исследования. В работе применяются методы линейной алгебры, теории вероятностей и случайных процессов, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теория обработки сигналов, методы математического моделирования и методы оптимизации.

Степень обоснованности и достоверности полученных научных результатов. Достоверность полученных результатов обоснована приведенными доказательствами лемм и теорем, корректностью проведенных математических преобразований, а также дополнительно проверена результатами математического и компьютерного моделирования, согласующимися с теоретическими результатами.

Апробация. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных конференциях: XI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Москва, 2010; 9-th International Conference Process Control 2010, Kouty nad Desnou: Czech Republic, 2010; Конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург); 11-й Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2014, Арзамас); I, II, IV Всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация», 2009, 2010, 2012; 19th International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2013); 13th European Control Conference (ECC 2014, Strasbourg, France); 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015); European Control Conference (ECC-2015, Linz, Austria); 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference); 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017, Valletta, Malta); 21st International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2017); 20th IFAC World Congress, 2017; 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018, Zadar, Croatia);

14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB-2018, Moscow); 18th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2018, Stockholm, Sweden; 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization Yekaterinburg, CAO-2018; 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland); 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019); International Workshop Navigation and Motion Control (NMC 2019), 2019, Saint Petersburg, Russia; 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 39 работ. В том числе 2 монографии, 16 журнальных статей в рецензируемых изданиях (15 индексируются в Web of Science и Scopus, а одна индексируется в Scopus), 20 статей в сборниках конференций (13 индексируются в Web of Science и Scopus, 3 индексируются в Scopus, 4 конференции индексируются в РИНЦ), 1 брошюра.

Среди опубликованных по теме диссертации работ пять статей из рецензируемых изданий являются сольными.

Личный вклад соискателя.

Все исследования, представленные в диссертационной работе, постановки и решения задач, формулировки и доказательства теорем, вычислительные эксперименты выполнены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию без ссылки включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Связь с планами научных исследований.

Результаты работы были использованы при выполнении следующих проектов:

1. Грант РФФИ 14–08–00069 А Построение анизотропийной теории при ненулевом математическом ожидании входного возмущения.

2. Грант РФФИ 15–08–07019 Д Издание книги “Дескрипторные системы и задачи управления.”

3. Грант РФФИ 16–38–00216 мол_а Обеспечение заданного качества переходных процессов в анизотропийной теории для дескрипторных систем и решение задач анизотропийной фильтрации для дискретных обыкновенных и дескрипторных систем.

4. Грант РФФИ 17–08–00185 А Построение анизотропийной теории робастного управления и фильтрации для стационарных и нестационарных линейных систем при нулевом и ненулевом математическом ожидании входного возмущения.

5. Грант РФФИ 18–38–00076 мол_а Понижение влияния внешних возмущений для линейных дискретных систем с параметрическими неопределенностями.

6. Государственной программа финансовой поддержки ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074–U01) в рамках программы ITMO Postdoctoral Fellowship program.

7. Грант РНФ 18–71–00105 Разработка методов синтеза отказоустойчивых систем управления, находящихся под влиянием случайных возмущений.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка публикаций, списка литературы. Работа изложена на 277 страницах, содержит 35 иллюстраций, 10 таблиц. Список цитируемой литературы включает 282 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и значимость исследуемой проблематики, дан обзор литературы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В главе 1 рассмотрены основные особенности дискретных дескрипторных систем, дано краткое изложение теории анизотропийного анализа линейных систем управления, а также приведены формулировки известных лемм и теорем, которые будут использоваться в дальнейшем изложении. В первом разделе даются основные определения, относящиеся к теории дескрипторных систем, вводятся понятия эквивалентных форм, понятия регулярности, причинности, устойчивости и допустимости дескрипторной системы. Также рассмотрены различные виды управляемости и наблюдаемости и приведены формулы для вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости дескрипторных систем. Эти результаты известны и поэтому приводятся в обзорной форме, без доказательств с указанием ссылок на первоисточники.

Линейная стационарная система является одной из специальных форм описания дескрипторных систем и имеет вид:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bf(k), \tag{1}$$

$$y(k) = Cx(k) + Df(k), \tag{2}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $f(k) \in \mathbb{R}^m$ и $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — входная и выходная последовательности соответственно, $k \in \mathbb{Z}$, $K \geqslant 0$. Матрицы E, A, B, C, D — постоянные действительные матрицы соответствующих размерностей. Если в уравнении (1) матрица E является вырожденной, т.е. $\operatorname{rank}(E) < n$, то алгебраические связи между переменными не позволяют разрешить исходные уравнения относительно производной. Невозможность обратить матрицу E не дает перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Определение 1. *Для любых двух заданных матриц $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ пара матриц (E, A) называется регулярной (матричный пучок $(\alpha E - A)$ называется регулярным), если существует постоянный скаляр $\alpha \in \mathbb{C}$, для которого $\det(\alpha E - A) \not\equiv 0$.*

Для регулярных дескрипторных систем вводится понятие передаточной функции.

Определение 2. *Рациональная матричная функция $P(z) = C(zE - A)^{-1}B$ называется передаточной функцией дискретной дескрипторной системы (1)–(2). Здесь z — переменная Z-преобразования Лапласа.*

Понятие устойчивости дескрипторной системы определяется следующим образом.

Определение 3. *Система (1) называется (экспоненциально) устойчивой, если при $f(k) = 0$ и для любых согласованных начальных условий $x(0)$ справедливо неравенство*

$$\|x(k)\| \leq \alpha\beta^k\|x(0)\|,\ k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 0\ \alpha > 0,\ 0 < \beta < 1$$

Дискретные дескрипторные системы обладают несколькими особенностями, которые не позволяют быстро и легко обобщить результаты, полученные для обыкновенных систем. Главной такой особенностью является *нарушение принципа причинности* — текущее состояние системы может зависеть от будущих значений входного сигнала.

Пример 1. *Рассмотрим систему:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k+1) \ = \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(k),$$

Система записана в первой эквивалентной форме, а ее решение определяется в виде:

$$\begin{aligned} x_2(k) &= -f(k), \\ x_1(k) &= -f(k) - f(k+1). \end{aligned}$$

Первая переменная состояния зависит от будущих значений входа.

Система, которая является регулярной, причинной и устойчивой, называется допустимой. Отсюда следует и необходимая цель управления — сделать так, чтобы система была допустимой, а именно:

- решение должно зависеть от текущего значения входного сигнала, т.е. система должна быть причинной,
- динамическая подсистема должна быть устойчивой.

Рассмотрим важную эквивалентную форму для системы (1)–(2). Напомним, что $r = \operatorname{rank}(E)$, предполагаем, что пара матриц (E, A) является регулярной. Тогда из теории матриц следует, что можно подобрать такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, что $\widetilde{W}E\widetilde{V} = \operatorname{diag}(I_r, 0)$.

Применяя преобразование координат $\widetilde{V}^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, $x_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, и умножая левую и правую часть уравнения (1) на матрицу $\widetilde{W}$, система (1)–(2) запишется в виде:

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1 f(k), \tag{3}$$

$$0 = A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2 f(k), \tag{4}$$

$$y(k) = C_1 x_1(k) + C_2 x_2(k) + D f(k), \tag{5}$$

где

$$\widetilde{W}A\widetilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{W}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C\widetilde{V} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Система (3)–(6) называется второй эквивалентной формой или эквивалентной формой, основанной на сингулярной декомпозиции, для системы (1)–(2).

Далее приводятся основы анизотропийной теории управления в линейных обыкновенных системах. Пусть $W = \{w_k\}_{-\infty<k<\infty}$ — стационарная последовательность случайных векторов $w_k \in \mathbb{R}^m$ с конечными вторыми моментами.

Средняя анизотропия последовательности W определяется как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N})}{N}. \tag{7}$$

Средняя анизотропия последовательности W может быть определена в частотной области с использованием спектральной плотности как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2} d\omega = -\frac{1}{4\pi} \ln\det \frac{m\,\mathbf{cov}(\tilde{w}_0)}{\|G\|_2^2}, \tag{8}$$

где

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr}\left(\widehat{G}^*(\omega)\widehat{G}(\omega)\right) d\omega\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Tr} S(\omega) d\omega\right)^{1/2}.$$

Для вход-выходного соотношения (1)–(2) введем среднеквадратичный коэффициент усиления, определяемый соотношением:

$$Q(P,W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}},$$

где

$$\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \mathbf{E}|y(k)|^2}$$

— мощностная норма стационарной последовательности $Y = \{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Определение 4. *Для заданного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ анизотропийная норма системы P с реализацией в пространстве состояний (1)–(2) определяется выражением*

$$\|P\|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(P,W).$$

Таким образом, анизотропийная норма системы $\|P\|_a$ описывает стохастический коэффициент усиления системы P по отношению к внешнему возмущению W. Анизотропийная норма $\|P\|_a$ характеризует робастность системы P по отношению к случайному возмущению W, неточность знания статистических свойств которого описывается параметром a.

Глава 2. Во второй главе вводятся понятия $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ и анизотропийной норм передаточной функции дескрипторной системы. Следует заметить, что понятия $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ норм являются общеизвестными, но вынесены во вторую главу для удобства изложения материала работы. Приведены алгоритмы для вычисления соответствующих норм и вычислительные примеры. Далее в главе ставится задача анизотропийного анализа дескрипторной системы в более широком смысле, которая заключается в одновременной проверке ее на допустимость и оценке ограниченности анизотропийной нормы дескрипторной системы наперед заданным числом. Для решения данной задачи были сформулированы и доказаны различные варианты анизотропийной частотной теоремы.

Рассмотрим систему (1)–(2) и предположим, что внешним воздействием $f(k)$ является случайная гауссовская последовательность с нулевым средним и ограниченной средней анизотропией сверху числом $a \geqslant 0$.

Предположим также, что выполнено следующее ранговое условие:

$$\operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}.$$

Сформулируем анизотропийную частотную теорему на основе уравнения Риккати.

Теорема 1. *Пусть $P \in \mathcal{H}_\infty{}^{p\times m}$ — допустимая система с представлением в пространстве состояний (1)–(2). Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$*

и $\gamma > 0$ *анизотропийная норма системы ограничена сверху числом* γ, *т.е.* $\|P\|_a \leqslant \gamma$, *тогда и только тогда, когда существует такое число*

$$q \in [0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty^{-2})),$$

для которого справедливо неравенство

$$-\frac{1}{2}\ln\det\Big((1-q\gamma^2)\Sigma\Big) \geqslant a,$$

где матрица Σ *связана со стабилизирующим*[1] *решением* $\widehat{R} = \widehat{R}^\top$ *обобщенного алгебраического уравнения Риккати*

$$\begin{aligned} E^\top \widehat{R} E &= A^\top \widehat{R} A + qC^\top C + L^\top \Sigma^{-1} L, \\ L &= \Sigma(B^\top \widehat{R} A + qD^\top C), \\ \Sigma &= (I_m - B^\top \widehat{R} B - qD^\top D)^{-1}, \end{aligned}$$

с дополнительным условием

$$E^\top \widehat{R} E \geqslant 0.$$

Теорема 1 является важной фундаментальной теоремой, так как устанавливает связь между оценкой величины анизотропийной нормы допустимой дескрипторной системы и ее представлением в пространстве состояний без дополнительных преобразований к эквивалентной обыкновенной системе. Этот факт поможет в дальнейшем ставить и решать задачи синтеза в том числе и для непричинных систем. На основе теоремы 1 были получены условия в форме матричных неравенств.

Теорема 2. *Пусть* $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — *стационарная случайная гауссовская последовательность, средняя анизотропия которой не превосходит заданного числа, т.е.* $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, *где* $a \geqslant 0$. *Система* P *с реализацией в пространстве состояний* (1)–(2) *является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена положительным числом* $\gamma > 0$, *т.е.* $\|P\|_a < \gamma$, *если существует такой скалярный параметр* $q \in \Big[0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty)\Big)$ *и симметрическая матрица* R, *которые удовлетворяют неравенствам*

$$ERE^\top \geqslant 0,$$

$$-(\det(I_m - B^T R B - qD^T D))^{1/m} < -(1-q\gamma^2)e^{2a/m},$$

$$\begin{bmatrix} A^\top R A - E^\top R E & A^\top R B \\ B^\top R A & B^\top R B - I_m \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} C^\top \\ D^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0.$$

[1] Стабилизирующим решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати (9) будем называть матрицу $\widehat{R}$, для которой пара $(E,\ A+BL)$ является допустимой.

Для того, чтобы сформулировать следующий результат, предполагаем, что система является регулярной, поэтому для нее существуют такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, с помощью которых исходная система может быть представлена во второй эквивалентной форме (3)–(5). Ниже будем использовать следующие обозначения: $E_d = \widetilde{W} E \widetilde{V}$, $A_d = \widetilde{W} A \widetilde{V}$, $B_d = \widetilde{W} B$, $C_d = C \widetilde{V}$, $D_d = D$. Справедлива теорема.

Теорема 3. *Для заданных действительных чисел $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ система (1)–(2) с передаточной функцией $P(z)$ является допустимой и ее анизотропийная норма ограничена числом γ, т.е. $\|P\|_a < \gamma$, если существуют такие матрицы $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и скалярные величины $\eta > \gamma^2$ и $\alpha > 0$, что выполняются следующие неравенства:*

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m + B_d^\top \Theta B_d & D_d^\top \\ D_d & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top & \star & \star & \star & \star \\ A_d^\top \Gamma^\top & \Pi A_d + A_d^\top \Pi^\top - \Theta & \star & \star & \star \\ B_d^\top \Gamma^\top & B_d^\top \Pi^\top & -\eta I_m & \star & \star \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_d & -Q - Q^\top & \star \\ 0 & C_d + \alpha C_d \Pi A_d & D_d + \alpha C_d \Pi B_d & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

где $\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}$.

Теорема 3 сформулирована в форме строгих матричных неравенств. Также следует заметить, что начальное преобразование во вторую эквивалентную форму не влечет за собой преобразований к обыкновенной системе, а все вычисления производятся над эквивалентной дескрипторной системой. В силу того, что вторая эквивалентная форма опирается на сингулярную декомпозицию и легко алгоритмизуется, условия теоремы 3 могут быть легко реализованы с помощью численных методов.

Замечание 1. *Анизотропийная норма дескрипторной системы может быть вычислена с использованием методов выпуклой оптимизации*

$$\text{найти } \xi_* = \min \gamma^2$$

на множестве $\{L, Q, R, S, \Psi, \eta\}$, удовлетворяющих неравенствам (9)–(11). Если минимум ξ_* найден, то анизотропийная норма системы P вычисляется как

$$\|P\|_a \approx \sqrt{\xi_*}.$$

Глава 3 посвящена решению задачи синтеза анизотропийного управления для дескрипторных систем с точно известными параметрами. Главу условно можно разделить на две части: оптимальное управление и субоптимальное управление.

Рассмотрим общую постановку задачи оптимального анизотропийного управления для дескрипторной системы. Дескрипторная система с реализацией в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), && (12)\\ z(k) &= C_z x(k) + D_{zw} w(k) + D_{zu} u(k), && (13)\\ y(k) &= C_y x(k) + D_{yw} w(k), && (14) \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — случайное внешнее возмущение, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — сигнал управления, $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ — измеряемый выход.

Предполагается, что все параметры системы точно известны, а $w(k)$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$.

Пусть также выполнены следующие стандартные предположения о системе

A1. Система является стабилизируемой и причинно управляемой.

A2. Система является детектируемой и причинно наблюдаемой.

A3. Размерность управляемого сигнала z меньше размерности входного возмущения w: $p_1 < m_1$.

A4. Матрица D_{yw} имеет полный строчный ранг: $\operatorname{rank} D_{yw} = p_2 \leq m_1$.

A5. Матрица D_{zu} имеет полный столбцовый ранг: $\operatorname{rank} D_{zu} = m_2 \leq p_1$.

Рассмотрим строго неупреждающий линейный закон управления в виде:

$$u(k) = K(x(k), y(k)),$$

где $K(\cdot)$ — закон управления, подлежащий определению. Тогда задачу синтеза оптимального анизотропийного управления можно сформулировать в следующем виде:

Задача 1. *Для известного неотрицательного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ входного возмущения $w(k)$ и системы (12)–(14), необходимо найти закон управления $u(k) = K(x(k), y(k))$, который делает замкнутую систему допустимой и при этом минимизирует ее анизотропийную норму, определяемую соотношениями*

$$\sup_{\overline{\mathbf{A}}(G)\leqslant a} \frac{\|F_{cl}(P,K)G\|_2}{\|G\|_2} \to \min_K, \qquad (15)$$

где G — наихудший формирующий фильтр для замкнутой системы, $\mathbf{G}_a$ — множество таких формирующих фильтров с заданным уровнем средней анизотропии равным a, а $F_{cl}(P, K)$ означает замкнутую систему.

Решение задачи оптимального анизотропийного управления по состоянию, заключается в поиске закона управления $u(k) = Kx(k)$, при котором замкнутая система является допустимой и имеет минимальную анизотропийную норму от возмущения к управляемому выходу. При решении данной задачи также необходимо, чтобы выполнялись следующие ограничения:

$$\operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc} E & B_w \end{array}\right].$$

Выражения для замкнутой системы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), &(16)\\ z(k) &= Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k). &(17)\end{aligned}$$

Решение данной задачи состоит из двух этапов. На первом этапе необходимо найти условия на наихудший формирующий фильтр для замкнутой системы, а на втором — решить задачу синтеза $\mathcal{H}_2$ оптимального регулятора для расширенного объекта управления.

Введем следующие обозначения $\widehat{A} = A + B_u K$, $\widehat{C} = C_1 + D_u K$. Условия для вычисления наихудшего формирующего фильтра определяются теоремой.

Теорема 4. *Пусть система (16)–(17) является причинно управляемой и стабилизируемой. Тогда для любого уровня средней анизотропии входного возмущения $a \geqslant 0$ существует единственная пара (q, R), где скалярный параметр q принадлежит полуинтервалу $\left[0, \;\; \|P_{cl}\|_\infty^{-2}\right)$, а $R = R^\top$ — $n \times n$ матрица, для которой справедливо условие $E^\top RE \geqslant 0$. Решение (q, R) находится из системы уравнений*

$$\begin{aligned} E^\top RE &= \widehat{A}^\top R\widehat{A} + q\widehat{C}^\top\widehat{C} + L^\top\Sigma^{-1}L,\\ \Sigma &= (I_{m_1} - qD_w^\top D_w - B_w^\top RB_w)^{-1},\\ L &= \Sigma(B_w^\top R\widehat{A} + qD_w^\top\widehat{C}).\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m_1\Sigma}{\operatorname{tr}(LP_GL^\top + \Sigma)}\right) = a,$$

где $P_G = P_G^\top > 0$, $P_G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — грамиан управляемости формирующего фильтра G, который находится из решения обобщенного уравнения Ляпунова

$$EP_GE^\top = (\widehat{A} + B_wL)P_G(\widehat{A} + B_wL)^\top - B_w\Sigma B_w^\top.$$

Кроме того, формирующий фильтр G с реализацией в пространстве состояний

$$G = \left[\; E, \;\; \begin{array}{c|c} \widehat{A} + B_wL & B_w\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array} \;\right] \qquad (18)$$

является наихудшим формирующим фильтром для замкнутой системы.

На втором этапе решается стандартная задача синтеза $\mathcal{H}_2$ оптимального регулятора для дескрипторной системы. Рассмотрим теперь расширенную систему с реализацией

$$\begin{aligned} E_*\widehat{x}(k+1) &= A_*\widehat{x}(k) + B_{u*}u(k) + B_{v*}v(k), \\ z(k) &= C_*\widehat{x}(k) + D_w v(k), \end{aligned}$$

где $\widehat{x}(k) \in \mathbb{R}^{2n}$, $z(k) \in \mathbb{R}^p$, $v(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — белый гауссовский шум. Параметры системы равны $E_* = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$,

$$A_* = \begin{bmatrix} A & B_w L \\ 0 & A + B_w L \end{bmatrix}, \quad B_{u*} = \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_* = \begin{bmatrix} C & D_w L \end{bmatrix}.$$

Теорема 5. *Пусть система (16)–(17) является стабилизируемой и причинно управляемой. Закон управления, который решает оптимальную анизотропийную задачу, может быть найден из решения взвешенной задачи $\mathcal{H}_2$ оптимального управления в виде*

$$K = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

где $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix}$ определяется с помощью матрицы $T = T^\top$, удовлетворяющей условию $E_*^\top T E_* \geqslant 0$ и являющейся решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати

$$\begin{aligned} E_*^\top T E_* &= A_*^\top T A_* + C_*^\top C_* + \Gamma^\top \Pi \Gamma, \\ \Pi &= (B_{u*}^\top T B_{u*} + D_w^\top D_w), \\ \Gamma &= -\Pi^{-1}(B_{u*}^\top T A_* + D_w^\top C_*). \end{aligned}$$

Таким образом, решение оптимальной анизотропийной задачи при полном измерении вектора состояния сводится к решению связанных между собой матричных уравнений: два обобщенных алгебраических уравнения Риккати, обобщенного уравнения Ляпунова и нелинейного уравнения относительно средней анизотропии (8) входного возмущения.

Решение задачи при неполном измерении вектора состояния разделено на два этапа. На первом этапе строится контур, который будет обеспечивать свойство причинности для исходной системы (каузализация). На втором этапе строится оценивающий регулятор, стабилизирующий систему и минимизирующий анизотропийную норму замкнутой системы. В силу предположения A1 система является причинно управляемой, то есть существует такой закон управления $\tilde{u}(k) = K_1 y(k)$, что пара $(E, A + B_u K_1 C_y)$ является причинной.

Рассмотрим процедуру поиска коэффициента усиления K_1. Так как разомкнутая система (12)–(14) предполагается регулярной, то существуют такие две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, что исходная система (12)–(14) преобразуется ко второй эквивалентной форме, где

$$\widetilde{W} E \widetilde{V} = \operatorname{diag}(I_r, 0), \qquad \widetilde{W} A \widetilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

где $r = \operatorname{rank}(E)$. Если $\operatorname{rank}(A_{22}) = s < n - r$, рассмотрим следующий блок $(A_{22} + B_{22}K_1C_{22})$. Согласно предположению A1 существует такая матрица K_1, что $\operatorname{rank}(A_{22} + B_{22}K_1C_{22}) = n - r$. Применяя в очередной раз сингулярную декомпозицию, представим матрицу A_{22} в форме

$$S_{A_{22}}A_{22}U_{A_{22}} = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Умножая слева и справа выражение $(A_{22} + B_{22}K_1C_{22})$ на матрицы $S_{A_{22}}$ и $U_{A_{22}}$, получаем

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{B}_{22}K_1\widetilde{C}_{22}, \tag{21}$$

где $\widetilde{B}_{22} = S_{A_{22}}B_{22}$ и $\widetilde{C}_{22} = C_{22}U_{A_{22}}$.

Тогда задача каузализации может быть представлена как задача поиска такой матрицы коэффициентов K_1, что матрица (21) станет невырожденной. Для простоты положим, что необходимо найти такую матрицу K_1, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{B}_{22}K_1\widetilde{C}_{22} = \begin{bmatrix} 2I_s & 0 \\ 0 & I_{n-r-s} \end{bmatrix},$$

что эквивалентно

$$\widetilde{B}_{22}K_1\widetilde{C}_{22} = I_{n-r}.$$

Откуда следует, что

$$K_1 = \widetilde{B}_{22}^{+}\widetilde{C}_{22}^{+}, \tag{22}$$

где M^+ псевдообращение по Муру-Пенроузу матрицы M.

Процедура каузализации позволяет преобразовать исходную систему к эквивалентной системе, содержащей явные выражения для динамической и алгебраической подсистем. Получим следующую обыкновенную систему:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \mathcal{A}x_1(k) + \mathcal{B}_1w(k) + \mathcal{B}_2u_1(k), \\ z(k) &= \mathcal{C}_1x_1(k) + \mathcal{D}_{11}w(k) + \mathcal{D}_{12}u_1(k), \\ y(k) &= \mathcal{C}_2x_1(k) + \mathcal{D}_{21}w(k) + \mathcal{D}_{22}u_1(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \overline{A}_{11} - \overline{A}_{12}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{A}_{21}, & \mathcal{B}_i &= \overline{B}_{i1} - \overline{A}_{12}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{B}_{i2}, \\ \mathcal{C}_i &= \overline{C}_{i1} - \overline{C}_{i2}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{A}_{21}, & \mathcal{D}_{ij} &= D_{ij} - \overline{C}_{i2}\overline{A}_{22}^{-1}\overline{B}_{j2}, \end{aligned}$$

где $i, j = 1, 2$, $\overline{A} = A + B_uK_1C_y$, $\overline{C}_1 = C_z + D_{zu}K_1C_y$, $\overline{C}_2 = C_y$, $\overline{B}_1 = B_w + B_uK_1D_{yw}$, $\overline{B}_2 = B_u$ и $\overline{D}_{11} = D_{zw} + D_{zu}K_1D_{yw}$,

$$\widetilde{W}\overline{A}\widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{W}\overline{B}_w = \begin{bmatrix} \overline{B}_{11} \\ \overline{B}_{12} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{W}\overline{B}_u = \begin{bmatrix} \overline{B}_{21} \\ \overline{B}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\overline{C}_z\widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} \end{bmatrix}, \qquad \overline{C}_y\widetilde{V} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{21} & \overline{C}_{22} \end{bmatrix},$$

а $u_1(k)$ — новый закон управления. В общем случае эквивалентная система не удовлетворяет стандартным требованиям, налагаемым на объект управления. А именно, в общем случае не выполняется требование

$$\mathcal{D}_{22} = 0, \tag{23}$$

Ограничение (23) можно обойти, воспользовавшись заменой переменных

$$y^{(1)}(k) = y(k) - \mathcal{D}_{22}u_1(k).$$

После указанных выше преобразований система удовлетворяет стандартным требованиям, поэтому для нее применима уже решенная И.Г. Владимировым задача синтеза анизотропийного регулятора по выходу.

Таким образом, если исходная система не является причинной, то процедура синтеза анизотропийного регулятора по выходной переменной состоит из нескольких этапов. Причинная управляемость и наблюдаемость гарантируют существования такой статической обратной связи по выходу, которая сможет сделать систему причинной на первом этапе синтеза. Второй этап заключается в непосредственном нахождении оптимального закона управления, стабилизирующего систему и доставляющего минимум анизотропийной нормы замкнутой системе.

Далее рассматриваются задачи синтеза *субоптимального анизотропийного управления* по состоянию и по вектору полной информации. Приведем постановку задачи ниже.

Рассмотрим дескрипторную систему, заданную в пространстве состояний:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \tag{24}$$

$$z(k) = Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k), \tag{25}$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $a \geqslant 0$, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — управление, E, A, B_w, B_u, C, D_w, D_u известные действительные матрицы соответствующих размерностей, $\operatorname{rank}(E) = r < n$.

Предположим, что

1. система (24)–(25) является причинно управляемой и стабилизируемой;

2. выполнено ранговое ограничение $\operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}[\,E \quad B_w\,]$.

Задача 2. *Входная последовательность W — стационарная гауссовская случайная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$. Предполагается, что известны скалярные величины $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$. Задачей синтеза субоптимального анизотропийного регулятора для дескрипторных систем является поиск такого закона управления $u(k) = Kx(k)$, при котором замкнутая система является допустимой и выполнено неравенство*

$$\|P_{cl}\|_a \leqslant \gamma.$$

Данная задача решена с помощью двух техник: техники на основе Риккати-подхода и техники на основе матричных неравенств и выпуклой оптимизации.

Рассмотрим решение задачи субоптимального управления по состоянию на основе Риккати-подхода.

Теорема 6. *Для заданного уровня средней анизотропии входного возмущения* $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$ *и числа* $\gamma > 0$ *замкнутая система* P_{cl}^{SF} *является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом* γ, *т.е.* $\|P_{cl}^{SF}\|_a \leqslant \gamma$ *если существуют такая матрица* $\Phi = \Phi^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и положительное число* $\eta > \gamma^2$, *которые удовлетворяют следующим условиям*

$$
\begin{gathered}
E^\top \Phi E \geqslant 0, \\
B_w^\top \Phi B_w + D_w^\top D_w - \gamma^2 I_{m_1} < 0, \\
B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u > 0, \\
-\tfrac{1}{2}\ln(\det((\eta-\gamma^2)(\eta I_{m_1} - B_w^\top \Phi B_w - D_w^\top D_w)^{-1})) \geqslant a, \\
E^\top \Phi E = A^\top \Phi A + C^\top C - \\
-(A^\top \Phi \overline{B} + S)(\overline{B}^\top \Phi \overline{B} + R)^{-1}(\overline{B}^\top \Phi A + S^\top),
\end{gathered}
$$

где $\overline{B} = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} C^\top D_w & C^\top D_u \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} D_w^\top D_w - \eta I_{m_1} & D_w^\top D_u \\ D_u^\top D_w & D_u^\top D_u \end{bmatrix}$.
При этом закон управления определяется по формуле:

$$
F_2 = -(B_u^\top \Phi B_u + D_u^\top D_u)^{-1}(B_u^\top \Phi A + D_u^\top C).
$$

При использовании техники матричных неравенств были получены методики синтеза субоптимального анизотропийного управления в следующем виде. Предположим, что $D_u = 0$ и $m_1 \leqslant p$. Учитывая предположение о том, что система (24) является регулярной, мы можем найти две невырожденные матрицы $\widetilde{W}$ и $\widetilde{V}$, которые преобразуют исходную систему (24)–(25) к эквивалентной форме (3)–(5). Ниже будем использовать следующие обозначения:

$$
E_d = \widetilde{W} E \widetilde{V},\ A_d = \widetilde{W} A \widetilde{V},\ B_{wd} = \widetilde{W} B_w,\ B_{ud} = \widetilde{W} B_u,\ C_d = C\widetilde{V},\ D_{wd} = D_w.
$$

Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 7. *Рассмотрим систему* (24)–(25). *Предположим, что* $\operatorname{rank}(E^\top) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^\top & C^\top \end{bmatrix}$ *и* $m_1 \leqslant p$. *Для заданных числа* $\gamma > 0$ *и уровня средней анизотропии входной возмущающей последовательности* W $\overline{\mathbf{A}}(W) = a \geqslant 0$ *замкнутая система* P_{cl}^{SF} *является допустимой, а ее анизотропийная норма удовлетворяет неравенству* $\|P_{cl}^{SF}\|_a < \gamma$, *если найдутся такие матрицы* $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times m_2}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$, *и* *число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы неравенства*

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & \Lambda_{41}^\top & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^\top & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^\top \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^\top \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & -(Q+Q^\top) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{26}$$

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/p} < \gamma^2, \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p + C_d \Theta C_d^\top & D_{wd}^\top \\ D_{wd} & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{28}$$

где

$$\Lambda_{11} = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top,\ \Lambda_{21} = A_d\Gamma^\top + B_{ud}Z^\top\Omega^\top,$$

$$\Lambda_{31} = C_d\Gamma^\top,\ \Lambda_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^\top,$$

$$\Lambda_{22} = \Pi A_d^\top + A_d\Pi^\top + \Phi Z B_{ud}^\top + B_{ud}Z^\top\Phi^\top - \Theta,$$

$$\Lambda_{52} = B_{wd}^\top,\ \Lambda_{53} = D_{wd}^\top,\ \Lambda_{32} = C_d\Pi^\top.$$

Остальные обозначения определяются по формулам
$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$, $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$, $\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}$.
Тогда допустимый регулятор в форме статической обратной связи по состоянию может быть найден по формуле:

$$F_2 = Z^\top \begin{bmatrix} Q^{-\top} & 0 \\ -S^{-\top}R^\top Q^{-\top} & S^{-\top} \end{bmatrix} \widetilde{V}^{-1}. \tag{29}$$

Теорема 7 позволяет находить γ-оптимальное управление, решая оптимизационную задачу, подобно той, что рассмотрена в замечании 1, а также налагать дополнительные условия в виде ограничения на область расположения конечных собственных значений пары матриц замкнутой системы $(E, A + B_u F_2)$. Тогда дополнительно к условиям теоремы 7 необходимо потребовать выполнения условия

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\left(\begin{bmatrix} A_d \\ -E_d \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B_{2d} \\ 0 \end{bmatrix} Z^\top\right)\mho\right) < 0, \tag{30}$$

где

$$G = \begin{bmatrix} Q^\top & 0 \\ R^\top & S^\top \end{bmatrix},\quad \mho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

для $0 < \omega < 1$ и $X = X^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X > 0$. Здесь $\mathrm{He}\,(Y) = Y + Y^\top$. В случае, если неравенства (26)–(30) выполнены, то конечные собственные значения замкнутой системы лежат внутри диска с центром в начале координат и радиусом ω. Заметим также, что в случае поиска γ-оптимального управления условие $m_1 \leqslant p$ можно ослабить. Однако получаемое в результате минимизации значение γ^* в случае $m_1 > p$ может превосходить реальную анизотропийную норму замкнутой системы.

В **главе 4** рассмотрена задача робастного анизотропийного анализа и синтеза робастных анизотропийных регуляторов для дискретных дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Результаты, полученные в данной главе, основаны на обобщениях результатов синтеза субоптимальных регуляторов, представленных в третьей главе. Все результаты сформулированы в терминах матричных неравенств, а также получены выпуклые ограничения для решения задач анализа и синтеза. Пусть дескрипторная система задана в пространстве состояний в следующем виде:

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A_\Delta x(k) + B_{\Delta w} w(k) + B_{\Delta u} u(k), && (31)\\ y(k) &= C_\Delta x(k) + D_{\Delta w} w(k), && (32) \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^q$ — случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — выход системы, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ — управление. Матрица E является вырожденной, т.е. $\operatorname{rank}(E) = r < n$.

Матрицы системы представимы в следующем виде: $A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_{\Delta w} = B_w + M_B^w \Delta N_B^w$, $B_{\Delta u} = B_u + M_B^u \Delta N_B^u$, $C_\Delta = C + M_C \Delta N_C$, $D_{\Delta w} = D_w + M_D \Delta N_D$. Здесь матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s\times s}$ неизвестная матрица с ограниченной спектральной нормой, т.е. $\|\Delta\|_2 \leqslant 1$. Следует заметить также, что для спектральной нормы справедливо следующее утверждение: $\|\Delta\|_2 \leqslant 1$, если и только если $\Delta^\top \Delta \leqslant I_s$.

Система (31)–(32) преобразуется во вторую эквивалентную форму с использованием следующих обозначений

$A_d = \overline{W} A \overline{V}$, $B_{wd} = \overline{W} B_w = \begin{bmatrix} B_{w1}^d \\ B_{w2}^d \end{bmatrix}$, $B_{ud} = \overline{W} B_u$, $C_d = C\overline{V} = \begin{bmatrix} C_1^d & C_2^d \end{bmatrix}$, $D_{wd} = D_w$, $M_A^d = \overline{W} M_A$, $N_A^d = N_A \overline{V}$, $M_B^{wd} = \overline{W} M_B^w = \begin{bmatrix} M_{B1}^{wd} \\ M_{B2}^{wd} \end{bmatrix}$, $N_B^{wd} = N_B^w$, $M_B^{ud} = \overline{W} M_B^u$, $N_B^{ud} = N_B^u$, $M_C^d = M_C$, $N_C^d = N_C \overline{V} = \begin{bmatrix} N_{C1}^d & N_{C2}^d \end{bmatrix}$,

Предположим, что $p \leqslant q$, а также выполнены ранговые ограничения

$$\begin{gathered} \operatorname{rank}\left(E^\top\right) = \operatorname{rank}\left[E^\top, C^\top, N_C^\top\right], \\ \operatorname{rank}(E) = \operatorname{rank}\left[E, B_w, M_B^w\right]. \end{gathered}$$

Введем определение анизотропийной нормы для системы с неопределенностями.

Определение 5. *Пусть выход Y определяется выражением $Y = P_\Delta W$, где P_Δ — оператор системы, задаваемой уравнениями (31)–(32). Анизотропийной нормой системы с параметрическими неопределенностями будем называть норму оператора P_Δ, определяемую следующим соотношением:*

$$\left\| P_\Delta \right\|_a = \sup_{\Delta:\Delta^\top\Delta\leqslant I_s} \sup_{W\in\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

Ниже будут рассмотрены следующие задачи:

Задача 3. *Для системы с реализацией в пространстве состояний (31)–(32) и ограниченных по норме неопределенностей требуется проверить свойство робастной допустимости и выполнение ограниченности анизотропийной нормы системы $\left\| P_\Delta \right\|_a < \gamma$ для известных числовых значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$.*

Задача 4. *Для системы с реализацией в пространстве состояний (31)–(32) и известного уровня средней анизотропии входного возмущения $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $(a \geqslant 0)$ требуется построить закон управления $u(k) = Kx(k)$, который делает систему робастно допустимой и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы оператора замкнутой системы $\gamma > 0$.*

Задача анизотропийного анализа может быть решена с использованием следующей теоремы.

Теорема 8. *Для заданных чисел $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ система (31)–(32) является робастно допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом γ, т.е. $\left\| P_\Delta \right\|_a < \gamma$, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,$\Psi \in \mathbb{R}^{q\times q}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r\times r}$, для которых справедливы матричные неравенства*

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/q} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_1 N_1^\top N_1 & M_1 \\ M_1^\top & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon_2 N_2^\top N_2 & M_2 \\ M_2^\top & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_q & D_{wd}^\top & (B_{w1}^d)^\top H^\top \\ D_{wd} & -I_p & 0 \\ HB_{w1}^d & 0 & -H - H^\top + L \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_D & 0 \\ 0 & HM_{B1}^{wd} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_D & 0 & 0 \\ N_B^{wd} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & L^\top - Q^\top - \frac{1}{2}Q & 0 \\ A_d^\top \Gamma^\top & \Pi A_d + A_d^\top \Pi^\top - \Theta & \Pi B_{wd} & A_d^\top \Gamma^\top & C_d^\top \\ B_{wd}^\top \Gamma^\top & B_{wd}^\top \Pi^\top & -\eta I_q & B_{wd}^\top \Gamma^\top & D_{wd}^\top \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^\top & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^\top & 0 \\ 0 & C_d & D_{wd} & 0 & -I_p \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ \Pi M_A^d & \Pi M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C^d & M_D \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & N_C^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Теорема 9. *Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора в виде $u(k) = Fx(k)$ для системы (31)–(32) для заданных чисел $\gamma > 0$ и $a > 0$ ($\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$) разрешима, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,$\Psi \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $L \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r\times r}$, and $Z \in \mathbb{R}^{n\times m}$, для которых справедливы неравенства*

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/p} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_1 N_1 N_1^\top & M_1^\top \\ M_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Lambda + \varepsilon_2 M_2^\top M_2 & N_2 \\ N_2^\top & -\varepsilon_2 I_{5s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$M_1 = \begin{bmatrix} (M_D)^\top & 0 & 0 \\ \left(M_C^d H\right)^\top & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (N_D)^\top & 0 \\ 0 & \left(N_{C1}^d\right)^\top \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & \left(M_A^d\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(M_B^{wd}\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(M_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & \left(M_B^{wd}\right)^\top & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_D^w)^\top & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \Gamma\left(N_A^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_B^{wd}\right)^\top & \Gamma\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ \Pi\left(N_A^d\right)^\top & \Phi Z\left(N_B^{wd}\right)^\top & \Pi\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma\left(N_A^d\right)^\top & \Omega Z\left(N_B^{wd}\right)^\top & \Gamma\left(N_C^d\right)^\top & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(N_B^{wd}\right)^\top & (N_D^w)^\top \end{bmatrix},$$

$$\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p & D_{wd} & C_1^d H \\ D_{wd}^\top & -I_q & 0 \\ H^\top (C_1^d)^\top & 0 & -H - H^\top + L \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & \Lambda_{41}^\top & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^\top & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^\top \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^\top \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^\top & \Lambda_{31}^\top & -(Q + Q^\top) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{11} = -\tfrac{1}{2}Q - \tfrac{1}{2}Q^\top,\ \Lambda_{21} = A_d\Gamma^\top + B_{ud}Z^\top\Omega^\top,$$
$$\Lambda_{31} = C_d\Gamma^\top,\ \Lambda_{41} = L - Q - \tfrac{1}{2}Q^\top,$$
$$\Lambda_{22} = \Pi A_d^\top + A_d\Pi^\top + \Phi Z B_{ud}^\top + B_{ud}Z^\top\Phi^\top - \Theta,$$
$$\Lambda_{32} = C_d\Pi^\top,\ \Lambda_{52} = B_{wd}^\top,\ \Lambda_{53} = D_{wd}^\top.$$
$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix},\ \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$
$$\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Закон управления можно найти по формуле

$$F = Z^\top \begin{bmatrix} Q^{-\top} & 0 \\ -S^{-\top}R^\top Q^{-\top} & S^{-\top} \end{bmatrix} \overline{V}^{-1}.$$

При решении задачи модального управления к условиям, рассмотренным в теореме 9 следует добавить неравенство

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_3 M_3 M_3^\top & N_3^\top \\ N_3 & -\varepsilon_3 I_s \end{bmatrix} < 0,$$

в котором

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\left(\begin{bmatrix} A \\ -E \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} Z^\top\right)\mho\right),$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} M_A^d \\ 0 \end{bmatrix},\ N_3 = N_A^d G\mho,\ \ G = \begin{bmatrix} Q & R \\ R^\top & S \end{bmatrix},\ \ \mho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и потребовать его выполнение для $n \times n$ матрицы $X > 0$.

Отдельно решены задачи анализа и синтеза $\mathcal{H}_\infty$ робастного регулятора по состоянию. В отличие от задач анизотропийного анализа и управления, $\mathcal{H}_\infty$ задачи не требуют дополнительных ранговых ограничений типа (33)–(33) и условия $p \leqslant q$. Кроме того, матрица $D_{\Delta u}$ может быть ненулевой.

Рассмотрим применение теоремы 8 при анализе дескрипторных систем.

Пример 2. *Рассмотрим гидравлическую систему с тремя баками, представленную на рис. 1. Линеаризованная дискретная модель в пространстве состояний имеет вид:*

$$\begin{aligned} Eq(k+1) &= A^\Delta q(k) + B_u^\Delta u(k) + B_\xi^\Delta \xi(k), \\ y(k) &= C^\Delta q(k) + 0.3\eta(k), \end{aligned}$$

где $q(k)$ — вектор, представляющий объемы жидкости в баках, $u(k)$ — поток, создаваемый насосом, $\xi(k)$ — случайное возмущение, воздействующее на объект управления, $\eta(k)$ — шум измерений. Параметры объекта равны:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0.9692 & 0 & 0 \\ 0.0095 & 0.9867 & 0 \\ 1 & 2.3328 & 1 \end{bmatrix},$$

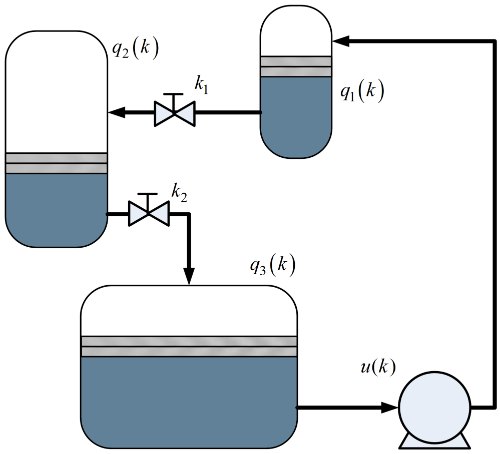

Рис. 1. Гидравлическая система из трех баков.

$$B_u = \begin{bmatrix} 0.056 \\ 0.003 \\ 0 \end{bmatrix}, \; B_\xi = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Введем обозначение $w = [\xi \;\; \eta]^\top$. *Тогда* $B_1 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \end{bmatrix}$.
Пусть неопределенности выражаются через матрицы:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.01 & 0.03 \end{bmatrix}^\top \; N_A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \; N_B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \; M_C = 1,$$

$$N_C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \; M_D = 0, \; N_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что система является робастно допустимой для всех значений $\Delta \in [-1;\; 1]$.

На рис. 2 представлены результаты оценки анизотропийной нормы на основе минимизации γ *с использованием разработанных теорем.*

Глава 5 посвящена вопросам анизотропийного анализа и синтеза в параметрически неопределенных обыкновенных системах. Рассматриваются два типа параметрических неопределенностей: политопические и ограниченные по норме неопределенности.

Системы с политопическими неопределенностями.

Одним из важных математических описаний параметрических неопределенностей в линейной стационарной системе является политопическая неопределенность. Это такая неопределенность, при которой множество всех возможных параметров системы находится внутри выпуклого многогранника, а номинальная система принадлежит центру этого многогранника.

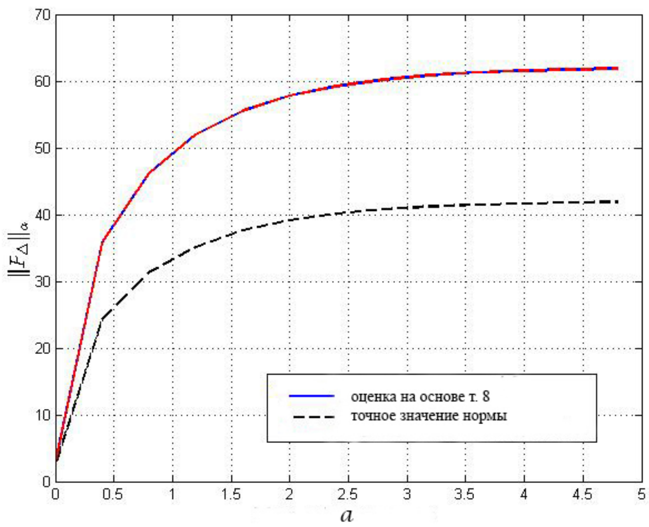

Рис. 2. Анизотропийный анализ системы с использованием разных теорем.

Рассмотрим линейную систему с реализацией в пространстве состояний в виде:

$$x(k+1) = A(\Theta)x(k) + B_u(\Theta)u(k) + B_w(\Theta)w(k), \quad (33)$$

$$z(k) = C(\Theta)x(k) + D_u(\Theta)u(k) + D_w(\Theta)w(k), \quad (34)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее случайное возмущение с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ $(a \geqslant 0)$, $u(k) \in \mathbb{R}^q$ — вектор управления, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход системы.

Матрицы $A(\Theta)$, $B_w(\Theta)$, $B_u(\Theta)$, $C(\Theta)$, $D_w(\Theta)$ определяются из выражений

$$A(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i A_i, \quad B_w(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i B_{wi},$$
$$B_u(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i B_{ui}, \quad D_u(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i D_{ui},$$
$$C(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i C_i, \quad D_w(\Theta) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i D_{wi}, \quad (35)$$

где вектор неопределенных параметров Θ обладает следующими свойствами

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_i = 1, \quad \theta_i \geqslant 0, \quad \theta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = \overline{1, r}. \quad (36)$$

Обозначим множество всех параметров Θ, удовлетворяющих (35) и (36), через $\mathfrak{Q}$ и рассмотрим отображение $Z = F_\Theta W$, определяемое выражениями (33)–(34).

Определение 6. *Анизотропийной нормой политопической системы* (33)–(36) *будем называть норму оператора F_Θ, определяемую выражением*

$$\|F_\Theta\|_a = \sup_{\Theta\in\mathfrak{Q}} \sup_{W\colon A(W)\leqslant a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}. \tag{37}$$

В задаче робастного анизотропийного анализа политопических систем необходимо получить условия для проверки робастной устойчивости и ограниченности анизотропийной нормы разомкнутой системы (33)–(34) для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ и заданного числа $\gamma > 0$. Т.е. задачу анализа можно сформулировать следующим образом.

Задача 5. *Для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ входного случайного возмущения $w(k)$ и заданного числа $\gamma > 0$ при условии, что $u(k) = 0$ проверить:*

1. *является ли система робастно устойчивой;*
2. *выполняется ли условие*

$$\|F_\Theta\|_a < \gamma.$$

Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора по состоянию для политопической системы системы может быть сформулирована следующим образом.

Задача 6. *Для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$ и заданного числа $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде $u(k) = Kx(k)$, который робастно стабилизирует разомкнутую систему* (33)–(34) *и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы, т.е.*

$$\|F_\Theta^{cl}\|_a < \gamma.$$

Далее будут приведены параметрические и непараметрические решения поставленных выше задач.

Теорема 10. *Система* (33)–(34) *является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма не превышает заданного числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geqslant 0$, если существуют такие матрицы $P(\Theta) > 0$, $\Psi(\Theta) > 0$, невырожденные матрицы $G_1(\Theta)$, $G_2(\Theta)$ и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы матричные неравенства:*

$$\eta - \left(e^{-2a}\det\Psi(\Theta)\right)^{1/m} < \gamma^2, \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & \star & \star \\ G_1(\Theta)B_w(\Theta) & L_1(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \tag{39}$$

$$\begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_2(\Theta)A(\Theta) & G_2(\Theta)B_w(\Theta) & L_2(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0 \qquad (40)$$

где $L_1(\Theta) = -G_1(\Theta) - G_1^\top(\Theta) + P(\Theta)$ *и* $L_2(\Theta) = -G_2(\Theta) - G_2^\top(\Theta) + P(\Theta)$, *для любого значения* $\Theta \in \mathfrak{Q}$.

Условия теоремы 10 сформулированы в компактном виде и зависят явно от параметра Θ. В настоящее время не существует какого-либо формального метода для определения точного вида матрицы $P(\Theta)$ как функции от вектора параметров Θ. Такая функция $P(\Theta)$ в научной литературе носит название параметрической матрицы Ляпунова. К сожалению, такая параметрическая зависимость может существенным образом усложнить методику анализа исходной системы и делает невозможным решение задачи синтеза. Уменьшить вычислительную сложность алгоритма можно, вводя дополнительные ограничения, например, используя различные аппроксимации для матриц $\Psi(\Theta)$, $P(\Theta)$, $G_1(\Theta)$ и $G_2(\Theta)$. Такой подход, с одной стороны, позволяет избавиться от явного вхождения вектора параметров Θ в матричные неравенства, но с другой стороны, вносит некоторый консерватизм. Воспользуемся линейной аппроксимацией для параметрической матрицы Ляпунова и некоторых вспомогательных переменных. Справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Система* (33)–(34) *является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа* $\gamma > 0$ *для известного уровня средней анизотропии* $a \geqslant 0$ *и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих* (35)–(36), *если существуют такие матрицы* $P_i > 0$, $\Psi > 0$, *невырожденные матрицы* G_{1i}, G_{2i} *и число* $\eta > \gamma^2$, *при которых справедливы следующие матричные неравенства:*

$$\eta - \left(e^{-2a} \det \Psi\right)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i}B_{wi} & -G_{1i} - G_{1i}^\top - P_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i}A_i & G_{2i}B_{wi} & -G_{2i} - G_{2i}^\top + P_i & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i}B_{wj} & -G_{1i} - G_{1i}^\top + P_i & \star \\ D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1j}B_{wi} & -G_{1j} - G_{1j}^\top + P_j & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$
\begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i}A_j & G_{2i}B_{wj} & -G_{2i} - G_{2i}^\top + P_i & \star \\ C_j & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} -P_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2j}A_i & G_{2j}B_{wi} & -G_{2j} - G_{2j}^\top + P_j & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,
$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Полученные в теореме 11 условия свободны от вектора параметров Θ и позволяют оценить анизотропийную норму политопической системы, проверив выполнение $2r + r(r-1) + 1$ неравенства. Число неравенств, а также переменных можно снизить, повысив консерватизм оценки с учетом того факта, что $\Phi(\Theta) = P^{-1}(\Theta)$. Сформулируем теорему.

Теорема 12. *Система (33)–(34) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа* $\gamma > 0$ *для известного уровня средней анизотропии* $a \geqslant 0$ *и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих (35)–(36), если существуют такие матрицы* $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, *невырожденные матрицы* G_i *и число* $\eta > \gamma^2$, *при которых справедливы следующие матричные неравенства:*

$$
\eta - \left(e^{-2a} \det \Psi\right)^{1/m} < \gamma^2,
$$

$$
\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,
$$

$$
\begin{bmatrix} -G_i - G_i^\top + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,
$$

$$
\begin{bmatrix} -G_i - G_i^\top + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & \star \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} -G_j - G_j^\top + \Phi_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & \star \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,
$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Сформулируем параметрические условия для поиска стабилизирующего закона управления. Справедлива теорема.

Теорема 13. *Система* (33)–(34) *робастно стабилизируема законом управления в виде статической обратной связи по состоянию* $u(k) = K(\Theta)x(k)$, *а ее анизотропийная норма строго ограничена числом* $\gamma > 0$ *для известного уровня средней* $a \geqslant 0$ *входного возмущения для всех возможных неопределенностей, определяемых выражениями* (35)–(36) *если существуют такие матрицы* $\Phi(\Theta) > 0$, $\Psi > 0$, $L(\Theta)$, $G(\Theta)$ *и число* $\eta > \gamma^2$, *для которых справедливы неравенства*

$$\eta - \left(e^{-2a} \det \Psi\right)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -G(\Theta) - G^\top(\Theta) + \Phi(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A(\Theta)G(\Theta) + B_u(\Theta)L(\Theta) & B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & \star \\ C(\Theta)G(\Theta) + D_u(\Theta)L(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0.$$

При этом параметры регулятора определяются выражением

$$K(\Theta) = L(\Theta)G(\Theta)^{-1}.$$

Условия теоремы 13 также являются параметрическими. Эти условия неприменимы при реализации численных процедур синтеза робастного управления. Однако на их основе можно получить непараметрические условия для синтеза робастного анизотропийного управления.

Теорема 14. *Система* (33)–(34) *робастно стабилизируема законом управления в виде статической обратной связи по состоянию* $u(k) = Kx(k)$, *а ее анизотропийная норма строго ограничена числом* $\gamma > 0$ *для известного уровня средней анизотропии* $a \geqslant 0$ *входного возмущения для всех возможных неопределенностей, определяемых выражениями* (35)–(36) *если существуют такие матрицы* $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, $\overline{L}$, $\overline{G}$ *и число* $\eta > \gamma^2$, *для которых справедливы неравенства*

$$\eta - \left(e^{-2a} \det \Psi\right)^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\overline{G} - \overline{G}^\top + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i\overline{G} + B_{ui}\overline{L} & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i\overline{G} + D_{ui}\overline{L} & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0,$$

$i = \overline{1, r}$. *При этом параметры регулятора определяются выражением*

$$K = \overline{L} \cdot \overline{G}^{-1}.$$

Системы с ограниченными по норме неопределенностями. Рассмотрим постановки задач анизотропийного анализа и синтеза систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями.

$$x(k+1) = A^{\Delta}x(k) + B_w^{\Delta}w(k) + B_u u(k), \tag{41}$$

$$y(k) = C_y^{\Delta}x(k) + D_{yw}^{\Delta}w(k), \tag{42}$$

$$z(k) = C_z^{\Delta}x(k) + D_{zw}^{\Delta}w(k) + D_{zu}u(k), \tag{43}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — управление, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайная стационарная последовательность с нулевым средним и ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $z(k) \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $A^{\Delta} = A + M_A \Delta N_A$, $B_w^{\Delta} = B_w + M_B \Delta N_B$, $C_z^{\Delta} = C_z + M_C \Delta N_C$, $C_y^{\Delta} = C_y + M_{Cy} \Delta N_{Cy}$, $D_{yw}^{\Delta} = D_{yw} + M_{Dy} \Delta N_{Dy}$, $D_{zw}^{\Delta} = D_{zw} + M_D \Delta N_D$. Матрицы A, B_w, B_u C, D_w, C_z, D_{zw}, D_{zu}, M_A, N_A, M_B, N_B, M_C, N_C, M_D, N_D, M_{Cy}, N_{Cy}, M_{Dy} и N_{Dy} — постоянные, имеющие соответствующие размерности. Матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ — неизвестная, ограниченная по спектральной норме $\overline{\sigma}(\Delta) \leqslant 1$, т.е. $\Delta^{\top}\Delta \leqslant I_s$.

Анизотропийная норма системы (41)–(43) аналогична определению 5. Решение задач анализа и синтеза сформулированы в теоремах.

Теорема 15. *Для заданных действительных чисел* $a \geqslant 0$ *и* $\gamma > 0$ *система* (41)–(42) *робастно устойчива, а ее анизотропиная норма ограничена сверху параметром* γ, *т.е.* $\|F_{\Delta}\|_a < \gamma$, *если существуют такие числа* $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, *а также* $n \times n$*-матрица* $Y = Y^{\top} > 0$, $m \times m$*-матрица* $\Psi = \Psi^{\top} > 0$, *для которых справедливы следующие неравенства:*

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^{\top} & N_1^{\top} \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 M_2 M_2^{\top} & N_2^{\top} \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0.$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B^{\top} & D^{\top} \\ B & -Y & 0 \\ D & 0 & -I_p \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Y & 0 & YA^{\top} & YC^{\top} \\ 0 & -\eta I_m & B^{\top} & D^{\top} \\ AY & B & -Y & 0 \\ CY & D & 0 & -I_p \end{bmatrix},$$

$$
M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & M_D \end{bmatrix}, \;\; N_2 = \begin{bmatrix} N_A Y & 0 & 0 & 0 \\ N_C Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Теорема 16. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ закон управления $u(k) = Fx(k)$ робастно стабилизирует замкнутую систему и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы, если существуют числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $Y = Y^\top > 0$, $(m \times m)$-матрица Ψ и $(m_1 \times n)$-матрица Λ такие, что выполнены неравенства*

$$
\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,
$$

$$
\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0.
$$

Здесь

$$
\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B_w^\top & D_{zw}^\top \\ B_w & -Y & 0 \\ D_{zw} & 0 & -I_p \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\Omega = \begin{bmatrix} Y & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ AY + B_u \Lambda & B_w & -Y & \star \\ C_z Y + D_{zu} \Lambda & D_{zw} & 0 & -I_p \end{bmatrix},
$$

$$
M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & M_D \end{bmatrix}, \;\; N_2 = \begin{bmatrix} N_A Y & 0 & 0 & 0 \\ N_C Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

При этом закон управления можно найти в виде:

$$
F = \Lambda Y^{-1}.
$$

Теорема 17. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ закон управления $u(k) = Ky(k)$ робастно стабилизирует замкнутую систему и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Pi = \Pi^\top > 0$, $(m \times m)$-матрица Ψ, $(n \times n)$-матрица Y и $(m_1 \times p)$-матрица K такие, что выполнены следующие неравенства:*

$$
\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,
$$

$$
\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_1 N_1^\top N_1 & M_1 \\ M_1^\top & -\varepsilon_1 I_{6s} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_2 N_2^\top N_2 & M_2 \\ M_2^\top & -\varepsilon_2 I_{3s} \end{bmatrix} < 0,
$$

причем

$$\Phi\Pi = I_n.$$

Здесь

$$\Omega = \left[\begin{array}{cccc} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{array}\right],$$

$$M_1 = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & B_u K M_{Cy} & 0 & M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Cy} & M_C & 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{array}\right],\ N_1 = \left[\begin{array}{cccc} N_A & 0 & 0 & 0 \\ N_{Cy} & 0 & 0 & 0 \\ N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_{Dy} & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\mho = \left[\begin{array}{ccc} \Psi - \eta I_m & * & * \\ B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{array}\right],$$

$$M_2 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{array}\right],\ N_2 = \left[\begin{array}{ccc} N_B & 0 & 0 \\ N_{Dy} & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Для решения задачи синтеза робастного анизотропийного динамического регулятора по выходу, рассмотрим линейный динамический регулятор вида

$$\xi(k+1) = A_\xi \xi(k) + B_\xi y(k), \tag{44}$$

$$u(k) = C_\xi \xi(k) + D_\xi y(k), \tag{45}$$

где $\xi(k) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ — состояние регулятора, а постоянные матрицы A_ξ, B_ξ, C_ξ, D_ξ подлежат определению.

С учетом (44)–(45) матрицы замкнутой системы примут вид:

$$\mathcal{A}^\Delta = \left[\begin{array}{cc} A^\Delta + B_u D_\xi C_y^\Delta & B_u C_\xi \\ B_\xi C_y^\Delta & A_\xi \end{array}\right], \quad \mathcal{B}^\Delta = \left[\begin{array}{c} B_w^\Delta + B_u D_\xi D_{yw}^\Delta \\ B_\xi D_{yw}^\Delta \end{array}\right],$$

$$\mathcal{C}^\Delta = \left[\begin{array}{cc} C_z^\Delta + D_{zu} D_\xi C_y^\Delta & D_{zu} C_\xi \end{array}\right], \quad \mathcal{D}^\Delta = D_{zw}^\Delta + D_{zu} D_\xi D_{yw}^\Delta.$$

Сформулируем теорему.

Теорема 18. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача синтеза динамического регулятора порядка $n_\xi \leqslant n$ в форме (44)–(45) разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, матрицы $\Psi > 0$, $X > 0$, $Y > 0$, A_ξ, B_ξ, C_ξ, D_ξ, для которых выполнены следующие неравенства:*

$$\left[\begin{array}{cc} \mathcal{G}_1 + \varepsilon_1 \mathcal{N}_1^\top \mathcal{N}_1 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^\top & -\varepsilon_1 I_{7s} \end{array}\right] < 0,$$

$$\eta - (e^{-2a}\det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2,$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_2 + \varepsilon_2 \mathcal{N}_2^\top \mathcal{N}_2 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^\top & -\varepsilon_2 I_{3s} \end{bmatrix} < 0,$$

причем

$$XY = I_n.$$

Матрицы $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{N}_2$ *определяются выражениями*

$$\mathcal{G}_1 = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{-X} & \star & \star & \star \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & -\eta I_m & \star & \star \\ \hline A + B_u D_\xi C_y & B_u C_\xi & B_w + B_u D_\xi D_{yw} & -Y & \star \\ B_\xi C_y & A_\xi & B_\xi D_{yw} & & \\ \hline C_z + D_{zu} D_\xi C_y & D_{zu} C_\xi & D_{zw} + D_{zu} D_\xi D_{yw} & 0 & -I_p \end{array}\right],$$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & B_u D_\xi M_C & 0 & 0 & M_B & B_u D_\xi M_{Dy} & 0 \\ 0 & B_\xi M_C & 0 & 0 & 0 & 0 & B_\xi M_{Dy} \\ 0 & D_{zu} D_\xi M_{Cy} & M_C & 0 & 0 & D_{zu} D_\xi M_{Dy} & M_D \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}_1 = \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \\ N_{Cy} & 0 & 0 & 0 \\ N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_{Dy} & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{G}_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ \hline B_w + B_u D_\xi D_{yw} & -Y & \star \\ B_\xi D_{yw} & & \\ \hline D_{zw} + D_{zu} D_\xi D_{yw} & 0 & -I_p \end{array}\right],$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_B & B_u D_\xi M_{Dy} & 0 \\ 0 & B_\xi M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} D_\xi M_{Dy} & M_D \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}_2 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_{Dy} & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 3. *Рассмотрим теперь модель линейного осциллятора - математического маятника. Модель математического маятника в пространстве состояний имеет вид:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A^{\Delta}x(t) + B_u u(t) + B_w w(t), \\ y(t) &= x_1(t), \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t), \end{aligned}$$

где $\omega = 5$, $\xi = 0.5$,

$$A^{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.12 & 0.2 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \; B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D_{zw} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Исходная непрерывная модель была дискретизована с шагом $h = 10^{-3}$ *с. Отметим, что исходная система является устойчивой, однако ее переходный процесс является сильно колебательным и слабо затухающим. Входное возмущение является случайной гауссовской последовательностью с уровнем средней анизотропии* $\overline{\mathbf{A}}(w) = 0.7$. *В результате анализа было получено, что анизотропийная норма разомкнутой системы с неопределенностями не превосходит числа* $\|F^{\Delta}\|_a < 12.2957$, *в то время, как анизотропийная норма номинальной системы равна* $\|F_{nom}\|_a \approx 4.2475$.

Регулятор по состоянию, минимизирующий γ, *имеет вид:*

$$F = \begin{bmatrix} -110.4176 & 541.4826 \end{bmatrix}.$$

Анизотропийная норма замкнутой системы не превосходит

$$\|F^{SF}\|_a < 0.5632.$$

Регулятор в форме статической обратной связи по выходу равен

$$K = -1.7369,$$

а анизотропийная норма замкнутой этим регулятором системы не превосходит

$$\|F^{OUT}\|_a < 0.8645.$$

На рис. 3 и рис. 4 представлена динамика управляемых выходов $z_1(k)$ *и* $z_2(k)$ *соответственно для разомкнутой и замкнутой систем с начальными условиями* $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^{\top}$.

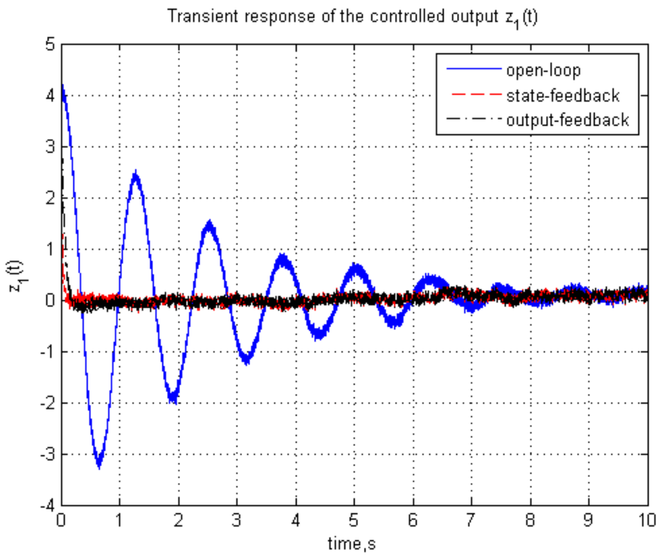

Рис. 3. Траектория движения управляемого выхода $z_1(k)$.

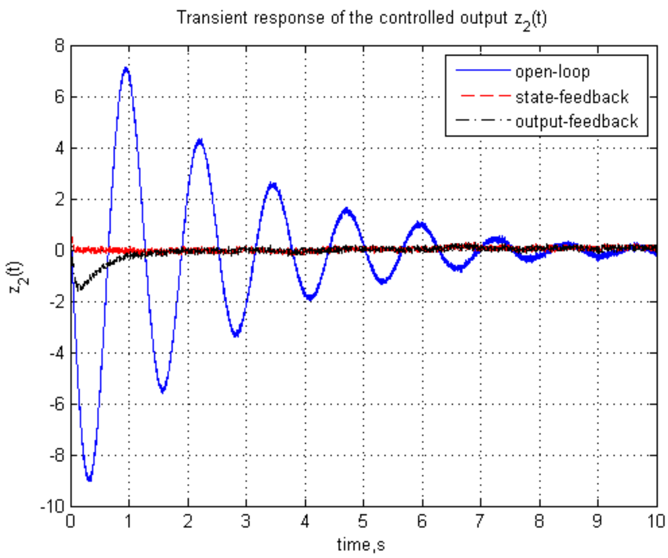

Рис. 4. Траектория движения управляемого выхода $z_2(k)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

В диссертационной работе в рамках решения фундаментальной проблемы теории и практики автоматического управления — понижения влияния внешних возмущений, действующих на линейные динамические системы — были разработаны и предложены новые регулярные методы анализа и синтеза в классе дискретных линейных дескрипторных систем, а также обыкновенных дискретных систем с параметрическими неопределенностями.

1. Для линейных дискретных дескрипторных систем были разработаны методы анизотропийного анализа и алгоритмы вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с использованием техники Риккати и методов выпуклой оптимизации.

2. Для линейных дискретных дескрипторных систем были получены условия для поиска оптимальных и субоптимальных анизотропийных регуляторов при полном и неполном измерении вектора состояния на основе Риккати-подхода, а также с помощью методов выпуклой оптимизации.

3. Разработаны методы анализа и синтеза робастного анизотропийного управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

4. Были разработаны аналитические методы робастного анизотропийного анализа линейных дискретных обыкновенных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями.

5. Для линейныйх дискретных обыкновенных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями получены новые методы синтеза субоптимальных анизотропийных регуляторов, гарантирующих робастную устойчивость замкнутых систем, а также ограничивающих величину анизотропийной нормы от возмущения к управляемому выходу при полном и неполном измерении вектора состояния.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Монографии

1. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: АНО «Физматлит», 2015.

2. *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Control of Discrete-Time Descriptor Systems. Cham: Springer International Publishing, 2018.

Статьи в рецензируемых журналах Wos/Scopus

3. *Belov A.A., Kurdyukov A.P.* Calculation of the anisotropic norm of the descriptor system. // Automation and Remote Control, V. 71, pp. 1022–1033, 2010.

4. *Belov A.A.* Anisotropic controller design for descriptor systems with respect to the output variable // Automation and Remote Control. V. 74, No. 11. pp. 1838–1850. 2013.

5. *Belov A.A., Andrianova O.G.* A New Anisotropy-Based Control Design Approach for Descriptor Systems Using Convex Optimization Techniques // IFAC-PapersOnLine, Volume 48, Issue 11, Pages 372–377, 2015.

6. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Anisotropy-based Suboptimal State-Feedback Control Design Using Linear Matrix Inequalities // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 10. C. 1741–1755.

7. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust anisotropy-based control of linear discrete-time descriptor systems with norm-bounded uncertainties // IFAC-PapersOnLine. 2017. Volume 50, Issue 1. C. 15471–15476.

8. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On LMI Approach to Robust State-Feedback $\mathcal{H}_\infty$ Control for Discrete-Time Descriptor Systems with Uncertainties in All Matrices // IFAC-PapersOnLine. 2017. Volume 50, Issue 1. C. 15483–15487.

9. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust state-feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties // International Journal of Systems Science. 2019. Vol. 50, No. 6. C. 1303—1312.

10. *Belov A.A., Ortega R., Bobtsov A.A.* Parameter Identification of Linear Discrete-Time Systems with Guaranteed Transient Performance // IFAC-PapersOnLine. 2018. pp. 1038–1043.

11. *Andrianova O.G., Belov A.A., Kurduykov A.P.* Conditions of anisotropic norm boundedness for descriptor systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. USA: Pleiades Publishing, Ltd, 2015. Vol. 54, No. 1. C. 27–38.

12. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Robust Anisotropy-Based Control for Uncertain Descriptor Systems with Transient Response Constraints // IFAC-PapersOnLine, 2018. V. 51, No. 32. C. 515–520.

13. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Robust performance analysis of linear discrete-time systems in presence of colored noise // European Journal of Control. 2018. Vol. 42. C. 38–48.

14. *Aranovskiy S., Belov A.A., Ortega R., Barabanov N., Bobtsov A.A.* Parameter identification of linear time-invariant systems using dynamic regressor extension and mixing. // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2019. Vol. 33, Iss. 6. pp. 1016-1030.

15. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust Control Design for Suppressing Random Exogenous Disturbances in Parametrically Uncertain Linear Systems. // Automation and Remote Control. V. 81, No 4. P. 649—661. 2020.

16. *Belov A.A.* State-feedback anisotropy-based robust control of linear systems with polytopic uncertainties // Journal of Physics: Conference Series. 2020. 1536. pp. 012008 (1–8).

17. *Kurdyukov A.P., Andrianova O.G., Belov A.A., Gol'din D.A.* In Between the $LQG/\mathcal{H}_2$- and $\mathcal{H}_\infty$-Control Theories. // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82, No. 4. pp. 565-618, 2021.

18. *Belov A.A.* Robust pole placement and random disturbance rejection for linear polytopic systems with application to grid-connected converters. // European Journal of Control, vol. 63, pp. 116–125, 2022.

Статьи в сборниках конференций WoS/Scopus

19. *Andrianova O., Belov A.* Anisotropy-based bounded real lemma for linear discrete-time descriptor systems. // Proceedings of the 19th International Conference on Process Control. Shtrbske Pleso, Slovakia: University of Pardubice, pp. 57–62, 2013.

20. *Belov A., Andrianova O.* Computation of anisotropic norm for descriptor systems using convex optimization // Proceedings of the 19th International Conference on Process Control. Shtrbske Pleso, Slovakia: University of Pardubice, pp. 173–178, 2013.

21. *Andrianova O., Kurdyukov A., Belov A., Kustov A.* Anisotropy-based analysis for descriptor systems with nonzero-mean input signals. // Proceedings of 13th European Control Conference (ECC14). Strasbourg, France: EUCA, pp. 430–435, 2014.

22. *Andrianova O.G., Belov A.A.* A Riccati equation approach to anisotropy-based control problem for descriptor systems: state feedback and full information cases // Proceedings of the European Control Conference (ECC-2015, Linz, Austria). Linz: European Control Association (EUCA), 2015. C. 3231–3236.

23. *Andrianova O., Belov A.* Anisotropy-based analysis for descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties. // Proc. of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia. pp. 1–4, 2016.

24. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Suboptimal anisotropy-based control design for discrete-time systems with nonzero-mean input disturbances // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). M.: IEEE, 2016. C. 1–4.

25. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On Anisotropy-Based Control Problem with Regional Pole Assignment for Descriptor Systems // Proceedings of the 21st International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2017). Strbske Pleso, Slovakia: IEEE, 2017. C. 12–17.

26. *Boichenko V.A., Belov A.A.* On Stochastic Gain of Linear Systems with Nonzero Initial Condition // Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017, Valletta, Malta). Valletta, Malta: IEEE, 2017. C. 817–821.

27. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Suboptimal anisotropy-based control for linear discrete-time systems with norm-bounded uncertainties // Proceedings of the 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2018, Moscow). M.: IEEE, 2018. C. 1–4.

28. *Belov A.A., Andrianova O.G.* On Optimal Anisotropy-Based Control Problem for Discrete-Time Descriptor Systems // Proceedings of the 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018, Zadar, Croatia). Zadar: IEEE, 2018. C. 661–666.

29. *Andrianova O.G., Belov A.A.* Non-Iterative Solution to Robust Anisotropy-Based Analysis and Control Problems for Uncertain Descriptor Systems / Proceedings of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019). New York: IEEE, 2019. C. 455–460.

30. *Andrianova O.G., Belov A.A.* On Robust Performance Analysis of Linear Systems with Polytopic Uncertainties Affected by Random Disturbances / Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland). New York: IEEE, 2019. C. 1–6 https://ieeexplore.ieee.org/document/8766038.

31. *Belov A.A., Andrianova O.G.* Sensor Fault Estimation for Discrete-Time Systems in Presence of Correlated Noise with Anisotropy-Based Quality Criterion // Proceedings of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019). New York: IEEE, 2019. C. 355-360.

32. *Belov A.A.* Improved Fault Detection and Estimation Filter Design Using Anisotropy-Based Approach // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia). New York: IEEE, 2020. C. 638–643.

33. *Iureva R.A., Belov A.A., Margun A.A., Kremlev A.S.* Electric Drive Attack Detection Based on State Observers // Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland). New York: IEEE, 2019. C. 1–5 https://ieeexplore.ieee.org/document/8766015.

34. *Belov A.A.* Random Disturbance Attenuation in Discrete-time Polytopic Systems: Performance Analysis and State-Feedback Control // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia). Saint Petersburg: IEEE, 2020. C. 633–637.

Прочие публикации

35. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Анизотропийная норма дескрипторной системы. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XII международного семинара, Москва, С. 46 - 48, 2010.

36. *Белов А.А., Курдюков А.П.* Линейные дескрипторные системы дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2011. – 90 с.

37. *Белов А.А.* Решение задачи анизотропийного управления дескрипторной системой по выходу // Труды 5-й Российской мультиконференции по проблемам управления, конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург). СПб.: ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор 2012. С. 276-279.

38. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Анизотропийный анализ дескрипторных систем с использованием ЛМН // Труды 11-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2014, Арзамас). Арзамас: ИПУ РАН, 2014. С. 33-45.

39. *Белов А.А., Андрианова О.Г., Гольдин Д.А.* Анизотропийная частотная теорема для линейных дискретных систем с политопическими неопределенностями // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 325-329.

Личный вклад соискателя в публикациях. В публикациях, выполненных в соавторстве: в [1, 2, 36] автором проведен анализ существующих методов управления в дескрипторных системах, поставлены и решены задачи анализа и синтеза анизотропийных регуляторов для дескрипторных систем; в [3, 35, 38] решена задача анизотропийного анализа дескрипторной системы, проведено численное моделирование на примере; в [5, 6] получена методика синтеза субоптимального анизотропийного регулятора, проведен вычислительный эксперимент; в [7, 8, 9, 23, 27] разработаны методы синтеза робастных анизотропийных и $\mathcal{H}_\infty$ регуляторов для дескрипторных систем, проведены вычислительные эксперименты; в [10] получены необходимые условия идентифицируемости параметров линейной дискретной системы с заданной скоростью сходимости, проведен вычислительный эксперимент; в [11, 19] доказаны условия анизотропийной частотной теоремы для дескрипторных систем в терминах уравнений Риккати; в [12] разработан метод синтеза робастного анизотропийного регулятора с ограничением на область расположения конечных полюсов замкнутой системы, проведен численный эксперимент; в [13] разработаны алгоритмы оценки верхней границы анизотропийной нормы обыкновенной и дескрипторной системы, проведены численные эксперименты; в [14] получены необходимые и достаточные условия идентифицируемости линейной стационарной системы; в [15] получена методика синтеза робастного анизотропийного регулятора по состоянию, разработана методика синтеза γ-оптимальных регуляторов, проведены вычислительные эксперименты; в [17] проведен анализ существующих подходов анизотропийной теории к решению задач управления; в [20] разработана методика вычисления анизотропийной нормы допустимой дескрипторной системы; в [21] получены формулы для анизотропийной нормы дескрипторной системы с нецентрированными возмущениями в частотной области; в [22] получены методики синтеза субоптимального управления по состоянию на основе техники Риккати, проведен вычислительный эксперимент; в [24] разработан алгоритм синтеза субоптимального анизотропийного регулятора для нецентрированных входных возмущений; в [25] получены условия синтеза модального анизотропийного регулятора, проведен численный эксперимент; в [26] получены условия на вычисление стохастического коэффициента линейной системы, проведен численный эксперимент; в [28] получены условия для синтеза оптимального анизотропийного регулятора по состоянию; в [31, 33] разработана методика синтеза наблюдателя отказов и проведен численный эксперимент; в [30, 39] разработан алгоритм вычисления анизотропийной нормы политопической системы, проведен численный эксперимент.