

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской академии наук

На правах рукописи



Антипов Алексей Семенович

**«Блочный метод синтеза сигмоидальных обратных связей
для мехатронных систем при действии возмущений»**

Специальность 2.3.1 – «Системный анализ, управление
и обработка информации»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д-р техн. наук, проф.
Краснова Светлана Анатольевна

Москва – 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Актуальные проблемы управления мехатронными системами	15
1.1. Методы обеспечения инвариантности по отношению к внешним возмущениям.....	15
1.2. Рассматриваемые типы мехатронных систем.....	30
1.3. Выводы к главе 1	39
Глава 2. Декомпозиционная процедура синтеза сигмоидальных локальных связей с учетом заданной точности и заданного времени регулирования	41
2.1. Особенности сигмоидальных обратных связей.....	41
2.2. Модель объекта управления. Постановка задачи.....	52
2.3. Блочный синтез системы управления с сигмоидальными локальными связями	54
2.4. Результаты моделирования.....	66
2.5. Выводы к главе 2	70
Глава 3. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности	72
3.1. Модель объекта управления. Постановка задачи.....	72
3.2. Решение задачи слежения в механической подсистеме	76
3.3. Иерархическая процедура синтеза сигмоидальных обобщенных моментов в условиях неопределенности входных каналов.....	79
3.4. Синтез наблюдателя состояния пониженного порядка с сигмоидальными корректирующими воздействиями	83
3.5. Решение задачи слежения в электрической подсистеме	86

3.6. Результаты моделирования.....	88
3.7. Выводы к главе 3	96
Глава 4. Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния.....	97
4.1. Описание объекта управления. Постановка задачи	97
4.2. Базовый закон управления	101
4.3. Наблюдатель угловых скоростей	109
4.4. Результаты моделирования.....	113
4.5. Выводы к главе 4	117
Глава 5. Стабилизация заданного положения ходовой тележки однобалочного мостового крана	118
5.1. Модель объекта управления. Постановка задачи.....	118
5.2. Синтез закона управления	120
5.3. Апробация разработанных алгоритмов для промышленного крана СХТС10-ТОН	123
5.4. Выводы к главе 5	131
Заключение	133
Список литературы	135
ПРИЛОЖЕНИЕ	150

Введение

Актуальность темы исследования. Мехатронные объекты управления – это системы, состоящие из нескольких модулей разной физической природы, синергетически связанных между собой и предназначенных для выполнения конкретных функциональных задач. В ходе решения разного рода задач управления мехатронными объектами нужно удовлетворить ограничениям на переменные состояния, которые связаны с технологическими требованиями и соображениями безопасности, обеспечить заданные показатели качества системы управления при воздействии внешних неконтролируемых возмущений. Следует также учитывать, что информация о параметрах и переменных состояния объекта может быть не полной, а ресурсы управления всегда являются ограниченными. Для эффективного управления мехатронными объектами в условиях неопределенности требуется разработка новых подходов, направленных на комплексное решение указанных проблем, что свидетельствует об актуальности темы диссертационного исследования.

Современное состояние исследований. Представительный класс мехатронных систем образуют механические и электромеханические объекты управления, их модели существенно нелинейные и многосвязные. Математические аспекты диффеоморфных преобразований нелинейных моделей в различные канонические формы рассматривались в работах Крищенко А.П., Канатникова А.Н., Ткачева С.Б., Рапопорта Л.Б., Пестерева А.В. [39, 50] и др. Построению законов управления для механических систем в условиях внешних возмущений посвящены работы Черноусько Ф.Л., Болотника Н.Н., Решмина С.А., Ананьевского И.М., Spong M. [4-8, 42-44, 58-60, 69-71, 132] и др., в которых применяются игровые подходы, методы оптимального и терминального управления. Различные алгоритмы робастного управления и компенсации возмущений предложены в работах Поляка Б.Т., Хлебникова М.В., Никифорова В.О., Бобцова А.А., Фуртата И.Б.

[17, 48, 52, 67] и др. Эффективным инструментом выступает ПИД-регулятор, который при параметрической неопределенности модели дополняется алгоритмами идентификации (Александров А.Г., Romero J.G., Donaire A., Urrea C. [1-3, 78, 79, 125, 137] и др.). Но, как правило, в рамках указанных подходов рассматривается конкретный вид, а не комплекс сопутствующих объекту неопределенностей.

Для мехатронных систем, состоящих из связанных модулей, особенно актуальной является реализация с помощью обратной связи разделения движений на разнотемповые составляющие (Дмитриев М.Г., Юркевич В.Д., Живанович М.М. [22, 25, 74], Naidu S. и др.). Декомпозицию обеспечивают и методы систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме (Емельянов С.В., Уткин В.И., Slotine J.E. [24, 64, 95, 114, 128] и др.). Организация скользящего режима обеспечивает также инвариантность по отношению к внешним возмущениям и неопределенностям, действующим в пространстве управления (т.е. являющихся согласованными) без необходимости восстановления неопределенных сигналов. В работах Пятницкого Е.С. и Матюхина В.И. [44, 54-57] предложен принцип декомпозиции механических систем, замкнутых разрывными управляющими моментами. Следует отметить, что разрывные управления естественно использовать в электрических исполнительных устройствах, работающих в ключевом режиме, а формирование управляющих сил и моментов в виде разрывных функций в механической подсистеме недопустимо из-за физических ограничений. В электромеханических системах внешние возмущения, действующие на механическую подсистему, несогласованы с истинным управлением и не могут быть непосредственно им подавлены.

Для обеспечения инвариантности регулируемых переменных по отношению к несогласованным возмущениям удобной методологической базой является блочный принцип управления (Лукьянов А.Г., Уткин В.А., Краснова С.А. [15, 23, 35, 36, 37, 40, 62, 75]) с организацией локальных

связей (фиктивных управлений). В классическом блочном подходе в качестве локальных связей используют линейные функции с большими коэффициентами усиления (Мееров М.В. [45]), что приводит к существенному перерегулированию, недопустимому в практических приложениях при наличии ограничений на переменные состояния. Таким образом, существующие методы обеспечения инвариантности по отношению к внешним несогласованным возмущениям недостаточно разработаны применительно к мехатронным системам с физическими ограничениями на переменные состояния и управления.

Если мехатронный объект по тем или иным причинам имеет неполный комплект датчиков, то для оценивания неизмеряемых переменных возникает необходимость в построении наблюдателя состояния нелинейного объекта. В условиях неопределенных входов в наблюдателе используют глубокие обратные связи (Khalil Н.К., Фомичев В.В., Маликов А.И. [41, 65, 106] и др.), что приводит к всплескам оценочных сигналов. Наблюдатели на скользящих режимах (Уткин В.А., Levant А., Spurgeon S., Edwards С. [19, 32, 96, 133] и др.) обеспечивают ограниченность оценочных сигналов, но требовательны к вычислительным ресурсам. В современных публикациях Красновой С.А. и Уткина А.В. [35] представлены каскадные алгоритмы синтеза наблюдателей состояний и возмущений с непрерывными корректирующими воздействиями в виде ограниченных S-образных сигма-функций, которые в допредельной ситуации обеспечивают преимущества систем с разрывными управлениями, функционирующими в скользящем режиме, а также лучшее качество (гладкость) оценочных сигналов. Представляется перспективным распространение этих методов на задачи синтеза инвариантных локальных связей при проектировании регуляторов для мехатронных объектов, функционирующих при действии несогласованных возмущений, не подлежащих дифференцированию.

Объект исследования – нелинейные многомерные системы, представимые в блочной форме вход–выход и используемые для описания

электромеханических систем автоматического управления, функционирующих в условиях параметрической неопределенности, действия внешних несогласованных возмущений и неполных измерений.

Предмет исследования – синтез инвариантных реализуемых обратных связей, обеспечивающих заданное поведение мехатронных объектов с учетом специфики их описания и функционирования.

Цель диссертационного исследования – разработка метода блочного синтеза сигмоидальных обратных связей для различных мехатронных объектов, обеспечивающих подавление с заданной точностью воздействия на выходные переменные несогласованных возмущений и не требующих восстановления внешних сигналов.

Данная цель определила следующие, основные **задачи работы**:

1) формализовать новый тип сигмоидальной обратной связи, для нелинейной неопределенно заданной системы первого порядка с аддитивными возмущениями обосновать выбор параметров сигмоидальной обратной связи, обеспечивающей стабилизацию с заданной точностью за заданное время;

2) для нелинейных одноканальных объектов управления в рамках блочного подхода разработать декомпозиционную процедуру синтеза сигмоидальных локальных связей, обеспечивающих отслеживание выходной переменной целевого сигнала с заданной точностью за заданное время при действии несогласованных ограниченных возмущений;

3) разработать метод синтеза редуцированных наблюдателей с сигмоидальными корректирующими воздействиями для оценивания обобщенных скоростей по измерениям обобщенных координат в условиях параметрической неопределенности мехатронной системы и действия на нее внешних возмущений;

4) для многоканальных систем с неопределенными матрицами фиктивных управлений разработать иерархическую процедуру настройки

амплитуд сигмоидальных обратных связей с применением к задаче управления движением конечной точки робота-манипулятора;

5) разработать процедуру синтеза сигмоидальных локальных связей с учетом ограничений на переменные состояния с применением к задаче слежения для двухроторной электромеханической системы при действии сил сухого трения;

б) для механических систем с недостатком управлений на основе свойства пассивности разработать комбинированную (линейную и сигмоидальную) локальную связь с применением к задаче стабилизации положения ходовой тележки однобалочного мостового крана с неопределенными массо-инерционными характеристиками.

Методами исследования диссертационной работы являются методы линейной алгебры и математического анализа; методы математической теории управления – разделения движений в классах систем с большими коэффициентами и разрывными управлениями, функционирующими в скользящем режиме, блочного подхода, теории наблюдателей состояния, инвариантности и устойчивости.

Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

1) предложен новый тип нелинейных обратных связей в виде S-образных сигма-функций, которые обеспечивают в замкнутой системе подавление несогласованных возмущений с заданной точностью и позволяют учитывать имеющиеся ограничения на переменные состояния и управления;

2) разработана процедура блочного синтеза сигмоидальных локальных связей с заданной точностью и временем стабилизации ошибки слежения для одноканальных систем слежения при действии несогласованных возмущений;

3) разработан метод синтеза редуцированного наблюдателя с сигмоидальной коррекцией для оценивания обобщенных скоростей по измерениям обобщенных координат, не требующий точного знания массо-инерционных характеристик механической подсистемы;

4) разработаны иерархическая процедура настройки сигмоидальных управлений с неопределенной матрицей и алгоритм синтеза сигмоидальных обобщенных моментов в задаче управления движением конечной точкой трехзвенного манипулятора с учетом сектора цилиндрического объема, в котором находится конечная точка в текущий момент времени;

5) разработана процедура блочного синтеза сигмоидальных обратных связей с учетом ограничений на переменные состояния и управления на примере двухроторной электромеханической системы с относительным порядком равным трем;

6) разработан комбинированный закон управления с линейной и сигмоидальной составляющими для механической системы с недостатком управлений, обеспечивающий лучшие по сравнению с ПД-регулятором показатели переходных процессов в условиях воздействия внешних неконтролируемых возмущений.

Достоверность полученных научных результатов обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата и подтверждается результатами численного моделирования в среде MATLAB-Simulink.

Области исследований. Работа соответствует специальности 2.3.1 – «Системный анализ, управление и обработка информации» в части системного анализа, управления и обработки информации по пунктам паспорта специальности: 1) теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации; 2) формализация и постановка задач системного анализа, управления, принятия решений и обработки информации; 3) разработка критериев и моделей описания и оценки эффективности решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации; 4) разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации; 5) разработка специального математического и

алгоритмического обеспечения систем анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.

Практическая значимость. При синтезе следящих мехатронных систем с сигмоидальными обратными связями не требуется точное знание параметров объекта и внешних воздействий, а также индивидуальная настройка параметров регулятора для каждого рабочего режима при изменении формы возмущений и задающих воздействий, если их величины не превышают заранее установленных диапазонов.

По сравнению с традиционными глубокими обратными связями использование ограниченных сигмоидальных управлений в системах с несогласованными возмущениями обеспечивает меньшее перерегулирование и снижает требуемый ресурс управления, что позволит использовать исполнительные электроприводы меньшей мощности. Использование в контуре обратной связи редуцированных наблюдателей позволит отказаться от установки датчиков обобщенных скоростей, что облегчит конструкцию механизма и снизит стоимость системы управления без потери качества.

Реализация результатов работы. Разработанные алгоритмы для мехатронных систем с недостатком управлений приняты к испытаниям ООО «Меридиан» для системы управления однобалочными мостовыми кранами типа СХТС10-ТОН, используемыми для перемещения грузов на складском логистическом комплексе в Астраханской области (Черноярский район, с. Солодники), что подтверждается актом о внедрении результатов диссертационной работы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1) метод подавления аддитивных возмущений с помощью гладких и ограниченных сигмоидальных управлений, не требующий восстановления внешних сигналов;

2) процедура блочного синтеза сигмоидальных локальных связей для нелинейных одноканальных систем при действии несогласованных

возмущений, обеспечивающая стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью за заданное время;

3) метод синтеза редуцированных наблюдателей с сигмоидальной коррекцией, гарантирующий оценивание обобщенных скоростей по измерениям положений с заданной точностью за заданное время при неопределенных массо-инерционных характеристиках мехатронного объекта и действия на него неконтролируемых сил;

4) комплексные конструктивные решения по синтезу динамической обратной связи с использованием сигма-функций применительно к конкретным мехатронным объектам, функционирующим в условиях параметрической неопределенности, действия внешних возмущений, а также без измерения обобщенных скоростей:

- в задаче управления движением конечной точки манипулятора с неопределенной матрицей управляющих моментов;

- в задаче отслеживания заданных сигналов угловыми положениями двухроторной электромеханической системы при наличии ограничений на переменные состояния и управление;

- в задаче стабилизации заданного положения ходовой тележки однобалочного мостового крана с прикрепленным грузом.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на международных научных конференциях: Международная конференция им. Е.С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2016, 2018, 2020), Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ (Москва, 2019), Международной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» ПУМСС-2019 (Самара, 2019), Международная конференция «Управление развитием крупномасштабных систем» MLSD (Москва, 2018, 2020), Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения» АПЭП (Новосибирск, 2016), Международная научно-техническая конференция «Автоматизация» RusAutoCon (Сочи, 2019, 2020),

IFAC 2017 World Congress (Toulouse, 2017), а также на семинарах ИПМех РАН, ИПУ РАН.

Связь с планами научных исследований. Работа проводилась в рамках плановых фундаментальных научных исследований ИПУ РАН, поддержана грантами РФФИ 15-08-01543 А, 18-01-00846 А, 20-01-00363 А.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 20 работ, в том числе: 11 – в изданиях, проиндексированных в WoS и Scopus, 3 – в рецензируемых журналах, входящих в RSCI.

Структура работы. В первой главе обосновывается необходимость в разработке новых эффективных методов обеспечения инвариантности регулируемых переменных по отношению к негладким возмущениям, несогласованным с истинными управлениями. Дается описание рассматриваемых в работе механических и электромеханических объектов управления и учитываемых неопределенностей. Приведен краткий обзор современных методов управления мехатронными системами.

Во второй главе проведен анализ особенностей сигма-функции, обосновывается целесообразность ее использования в качестве инвариантной обратной связи. Для нелинейных одноканальных объектов управления, математическая модель которых представима в треугольной форме вход–выход, в рамках блочного подхода разработана декомпозиционная процедура синтеза сигмоидальных обратных связей. Нелинейный закон управления обеспечивает в замкнутой системе отслеживание выходной переменной целевого сигнала с заданной точностью за заданное время при действии несогласованных ограниченных возмущений (без предположений об их гладкости). Разработанные алгоритмы применены для системы управления перевернутым маятником, функционирующим в условиях неопределенности, приведены результаты моделирования.

В третьей главе представлено решение задачи автоматического управления движением конечной точки манипулятора с электрическими исполнительными устройствами. Особенность объекта управления:

неопределенные массо-инерционные характеристики механической подсистемы и действие на нее неконтролируемых сил, истинные управления формируются в классе разрывных функций, целевые сигналы заданы в системе координат конечной точки манипулятора, а не обобщенных координат; рассматриваются манипуляторы с избыточным числом степеней свободы. В рамках блочного принципа управления разработан прямой метод синтеза на основе перехода к системе дифференциальных уравнений, записанной непосредственно относительно регулируемых переменных и их производных, не требующий решения обратных задач кинематики и динамики. В механической подсистеме фиктивные управления формировались в виде и линейных (по скорости), и сигмоидальных (по моменту) стабилизирующих функций. Разработана реализация метода иерархии управлений и алгоритмизирована процедура настройки параметров сигмоидальных локальных связей в условиях неопределенной матрицы перед обобщенными моментами. Разработанные алгоритмы конкретизированы для задачи управления движением конечной точки трехзвенного манипулятора типа UMS-2 в цилиндрической системе координат. Особенность данного объекта: в его модели, представленной в блочной форме вход – выход, состав базисных миноров матрицы обобщенных моментов зависит от сектора цилиндрического объема, в котором находится конечная точка манипулятора. Результаты моделирования подтвердили эффективность разработанных алгоритмов.

В четвертой главе представлено решение задачи отслеживания заданных сигналов угловыми положениями двухроторной электромеханической системы, поведение которой во многом аналогично поведению реального технического устройства – вертолета, при действии внешних неконтролируемых возмущений в условиях измерений только угловых положений. Особенность механической подсистемы: математическая модель существенно нелинейна и параметрически неопределена, включает перекрестные связи между винтами и силы сухого

трения. Показано, что использование сигма-функций в обратных связях обеспечивает: апериодические переходные процессы регулируемых переменных; отслеживание заданных сигналов ε -инвариантно по отношению к имеющимся неопределенностям без расширения пространства состояний за счет внутренних моделей; возможность учитывать проектные ограничения по скорости и управлению на стадии синтеза. Результаты моделирования показали, что использование сигмоидальных обратных связей позволяет снизить величину перерегулирования в несколько раз по сравнению с использованием линейных обратных связей.

В пятой главе решается задача стабилизации заданного положения ходовой тележки однобалочного мостового крана с неопределенными массо-инерционными характеристиками при действии кусочно-гладких ограниченных внешних возмущений в условиях измерений только положения тележки. Особенность механической системы: ее математическая модель описывается системой нелинейных уравнений с одной входной (управляющей) и с двумя выходными (регулируемыми) переменными. На основе свойства пассивности системы построен закон управления, содержащий линейную и сигмоидальную части. Представлены результаты численного моделирования в системе MATLAB-Simulink применительно к промышленному крану CXTS10-TON. Показано, что по сравнению с ПД-регулятором при использовании ограниченной сигмоидальной функции обеспечивается меньшее перерегулирование, а также меньшая амплитуда управления в переходном процессе (до 4-х раз).

В заключении сформулированы выводы по результатам диссертационного исследования.

Глава 1. Актуальные проблемы управления мехатронными системами

Данная глава имеет обзорно-постановочный характер. В разделе 1.1 на примере нелинейной системы третьего порядка проводится сравнительный анализ различных методов обеспечения инвариантности по отношению к внешним возмущениям. Делается вывод о целесообразности введения гладких и ограниченных нелинейных обратных связей в задачах управления мехатронными объектами. В разделе 1.2 дается описание рассматриваемых в диссертационной работе механических и электромеханических объектов управления и учитываемых неопределенностей. Приведен краткий обзор современных методов управления мехатронными системами.

1.1. Методы обеспечения инвариантности по отношению к внешним возмущениям

Базовой проблемой теории автоматического управления является задача слежения, при решении которой нужно обеспечить в замкнутой системе отработку выходными переменными целевых допустимых сигналов с заданными показателями переходных и установившихся процессов. Основные усилия специалистов направлены на решение этой задачи применительно к объектам, функционирующим в условиях действия внешних неконтролируемых возмущений. Поясним суть основных методов компенсации и подавления возмущений, которые составили методологическую базу диссертационного исследования, на примере одноканальной системы.

Ориентируясь на класс исследуемых в работе объектов и задач управления, рассмотрим нелинейную управляемую систему с относительным порядком равным трем, представленную в канонической форме вход–выход, при действии внешних возмущений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \eta_1(t), \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \eta_2(t), \\ \dot{x}_3 &= f(x) + b(x)u + \eta_3(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3) \in X \subset R^3$ – измеряемый вектор состояния, X – открытая ограниченная область; $x_1 \in R$ – регулируемая переменная (выход) или ошибка слежения, $u \in R$ – управляющее воздействие (вход), $b(x) \neq 0$, $x \in X$; $\eta_i(t)$ – неизвестные функции времени, зависящие от внешних детерминированных возмущений и других неопределенностей в описании модели объекта управления, которые ограничены по модулю известными константами:

$$|\eta_i(t)| \leq H_i = \text{const} > 0, t \geq 0, i = \overline{1,3}.\tag{1.2}$$

Предположения о гладкости/негладкости этих функций, а также требования к определенности $f(x), b(x)$ будет уточняться по ходу изложения.

Ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающая стабилизацию выходной переменной $x_1(t)$ с заданной точностью $\Delta_1 > 0$

$$|x_1(t)| \leq \Delta_1, t \geq t_1\tag{1.3}$$

без учета заданного времени регулирования $t_1 > 0$, и ограниченность остальных переменных.

Наиболее разработанным в теории автоматического управления является случай, когда параметрически неопределенные функции и внешние возмущения являются аффинными и действуют в пространстве управления, т.е. условия согласования (англ. “matching conditions”) выполнены [94, 122, 141]. Для системы (1.1) условия согласования принимают вид:

$$\eta_i(t) \equiv 0, t \geq 0, i = 1, 2.\tag{1.4}$$

В системе (1.1), (1.4), а именно,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 &= f(x) + b(x)u + \eta_3(t),\end{aligned}$$

где требования к гладкости функций $f(x), \eta_3(t)$ в общем случае не предъявляются, по отношению к согласованным ограниченными возмущениям можно обеспечить инвариантность всего вектора состояния с помощью:

- 1) динамической обратной связи и компенсации возмущений;
- 2) статической обратной связи и подавления возмущений.

В рамках первого подхода требуется, во-первых, полная определенность множителя при управлении $b(x)$, во-вторых, тем или иным способом организовать в контуре обратной связи оценивание неизвестного возмущения $\eta_3(t)$ так, чтобы ошибка оценивания $\Delta\eta(t) = \eta_3(t) - \hat{\eta}_3(t)$ асимптотически затухала или достаточно быстро стала очень малой и ограниченной:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta\eta(t) = 0 \text{ или } |\Delta\eta(t)| \leq \delta, t \geq t_0, t_1 < t_0 < 0.$$

Полученная оценка $\hat{\eta}_3(t)$ используется для синтеза комбинированного управления

$$u = -(\varphi(x) + \hat{\eta}_3(t)) / b(x),$$

где $\varphi(x)$ – стабилизирующая составляющая. Если функция $f(x)$ полностью определена, то тогда можно обеспечить линеаризацию замкнутой системы с помощью обратной связи

$$u = -\frac{1}{b(x)} \left(f(x) + \hat{\eta}_3(t) + \sum_{i=1}^3 c_i x_i \right), \quad (1.5)$$

где $c_i > 0$ – коэффициенты устойчивого полинома $\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_2\lambda + c_1$.

Замкнутая система (1.1), (1.4), (1.5) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \Delta\eta(t), \end{aligned}$$

где в общем случае обеспечивается (1.3), а при затухающей ошибке оценивания – асимптотическая стабилизация всего вектора состояния и, следовательно, выходной переменной

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0. \quad (1.6)$$

В обоих случаях выбором $c_i > 0$ можно обеспечить требуемые показатели переходного процесса регулируемой переменной [52].

Стандартный подход к получению оценки внешнего возмущения $\hat{\eta}_3(t)$ заключается в расширении пространства состояний за счет динамической модели, имитирующей действие внешнего возмущения, и построения расширенного наблюдателя [9, 10, 18, 48]. При параметрической неопределенности моделей объекта и возмущений для оценивания неизвестных параметров дополнительно используют также алгоритмы идентификации и адаптации [78, 79, 16, 47, 48, 67, 68].

Однако реализация этих подходов приведет к большим ошибкам оценивания, если параметры и возмущения существенно меняются в процессе функционирования объекта, а используемая модель адекватно не описывает этих изменений. В свою очередь, учет всех возможных вариаций внешних возмущений приведет к недопустимому расширению динамической модели, значительному усложнению регулятора и увеличению времени счета управляющего сигнала. Альтернативой вводу модели внешних воздействий является построение наблюдателя на основе модели объекта управления, который при определенных условиях позволит получить оценки неизвестных входов с учетом их влияния на объект управления без наличия их динамической модели [32, 41, 101].

Второй подход к обеспечению инвариантности не требует оценивания внешнего возмущения и заключается в его подавлении с помощью так называемых «силовых» методов: разрывных управлений с принудительной организацией скользящих режимов или глубоких непрерывных обратных связей. Как правило, это линейные управления с большим коэффициентом усиления (англ. “high-gain factor”).

Для организации скользящего режима в системе (1.1), (1.4) нужно задать поверхность (плоскость) переключения

$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_3,$$

где $c_i > 0$ являются коэффициентами устойчивого полинома $\lambda^2 + c_2 \lambda + c_1$, и ввести закон разрывного управления

$$u = -M \operatorname{sign}(b(x)) \operatorname{sign}(s), \operatorname{sign}(b(x)) = \operatorname{const}, \quad (1.7)$$

где $M = \operatorname{const} > 0$ – амплитуда разрывного управления, $\operatorname{sign}(s)$ – функция знака

$$\operatorname{sign}(s) = \begin{cases} -1, & s < 0, \\ +1, & s > 0, \end{cases}$$

значение которой при $s = 0$ не определено, но ограничено на отрезке $[-1; 1]$.

В рамках данного метода не требуется полная определенность $f(x), b(x)$, но предполагаются известными границы их изменения

$$\begin{aligned} |f(x(t))| &\leq F, \\ 0 < b_{\min} &\leq |b(x)| \leq b_{\max}, \quad x \in X, t \geq 0. \end{aligned}$$

Достаточные условия возникновения скользящего режима на плоскости $s = 0$ имеют вид $s\dot{s} < 0$ [24, 64, 95, 114, 128], где

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c_2 s - c_2 c_1 x_1 + (c_1 - c_2^2) x_2 + f(x) - M |b(x)| \operatorname{sign}(s) + \eta_3(t), \\ |c_2 s(t) - c_2 c_1 x_1(t) + (c_1 - c_2^2) x_2(t)| &\leq C, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

и обеспечиваются при выборе амплитуды на основе неравенства

$$M > (C + F + H_3) / b_{\min}. \quad (1.8)$$

При определении верхней оценки C для допустимой области начальных условий $x(0)$ нужно оценить области изменения переменных замкнутой системы $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -c_1 x_1 - c_2 x_2 + s$ с учетом $|s(t)| \leq |s(0)|, t \geq 0$ [107].

При выполнении (1.8) обеспечивается $s\dot{s} \leq |s|(C + F + H - M b_{\min}) < 0$ и за конечное время $t > t_0, 0 < t_0 < t_1$ на плоскости $s = 0$ возникнет скользящий режим, динамический порядок замкнутой системы понижается

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -c_1 x_1 - c_2 x_2, s(t) = 0, \quad t \geq t_0, \end{aligned}$$

и из устойчивости принятого полинома следует асимптотическая стабилизация выходной переменной (1.6).

Таким образом, в рамках данного метода задача синтеза декомпозируется на две независимо решаемые подзадачи меньшей размерности, что упрощает синтез регулятора для многомерных объектов с векторным управлением. Главное преимущество метода: движение в скользящем режиме не зависит от оператора объекта управления, внешних согласованных возмущений и определяется выбором поверхности переключения. К недостаткам можно отнести необходимость вычисления верхней оценки C в системах с постоянной амплитудой разрывного управления при неопределенности множителя при управлении $b(x)$. Использование разрывных управлений естественно при наличии электрических безынерционных исполнительных устройств, которые могут функционировать исключительно в ключевом режиме.

Еще один «силовой» метод заключается в использовании в законе управления глубоких обратных связей – линейных управлений с большими коэффициентами усиления [45, 61, 62, 135]. Для объекта (1.1), (1.4) вместо разрывного управления (1.7) введем линейную обратную связь

$$u = -k \operatorname{sign}(b(x))s, \operatorname{sign}(b(x)) = \operatorname{const},$$

где $k = \operatorname{const} > 0$ – большой коэффициент усиления, обратно пропорциональный желаемой точности подавления согласованных возмущений и неопределенностей: $|s(t)| \leq \Delta, t \geq t_0, 0 < t_0 < t_1$. С учетом

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c_2 s - c_2 c_1 x_1 + (c_1 - c_2^2) x_2 + f(x) - k |b(x)| s + \eta_3(t), \\ |(c_1 - c_2^2) x_2(t) - c_2 c_1 x_1(t)| &\leq C_1, t \geq 0 \end{aligned}$$

выбор большого коэффициента на основе неравенства

$$k > \frac{C_1 + F + H_3}{\Delta b_{\min}} + \frac{c_2}{b_{\min}} \quad (1.9)$$

обеспечит выполнение достаточного условия $s\dot{s} \leq |s|(C_1 + F + H_3 - (kb_{\min} - c_2)|s|) < 0$ вне области $|s(t)| \leq \Delta$, в которую сойдется переменная $s(t)$ за конечное время. Замкнутую систему при $t \geq t_0$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -c_1x_1 - c_2x_2 + s, |s(t)| \leq \Delta, \end{aligned} \quad (1.10)$$

что обеспечивает цель управления (1.3), где Δ_1 зависит от Δ и принятых $c_{1,2}$.

Заметим, что при известных $f(x), b(x)$ можно сформировать комбинированные законы управления, «силовые» ресурсы которого будут тратиться только на подавление внешнего возмущения. С учетом

$$\dot{s} = c_1x_2 + c_2x_3 + f(x) + b(x)u + \eta_3(t)$$

комбинированный закон

$$u = -(c_1x_2 + c_2x_3 + f(x) + M\text{sign}(s)[\text{или } ks])/b(x)$$

приведет к замкнутой системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -c_1x_1 - c_2x_2 + s, \dot{s} = -M\text{sign}(s)[\text{или } -ks] + \eta_3(t) \end{aligned}$$

и при $M > H_3$ [или $k > H_3 / \Delta$] обеспечит выполнение (1.6) [или (1.3)].

Главное ограничение метода синтеза систем с глубокими обратными связями состоит в том, что большие коэффициенты усиления нереализуемы в практических приложениях. Для выполнения ограничений на управляющие воздействия используют непрерывные кусочно-линейные управления с насыщением в виде sat-функций [28, 35, 53], которые являются гибридом линейного и разрывного управлений. Эти функции ограничены, при росте коэффициентов усиления они стремятся к функции знака и, как следствие, обеспечивают в замкнутой системе свойства, близкие к свойствам систем, функционирующим в скользящем режиме, с некоторой точностью.

Рассмотрим для объекта (1.1), (1.4) обратную связь в виде sat-функции

$$u = -M\text{sign}(b(x))\text{sat}(\bar{k}s), \text{sign}(b(x)) = \text{const},$$

где $M = \text{const} > 0$ – амплитуда (полка), $\bar{k} = \text{const} > 0$ – большой коэффициент,

$$Msat(\bar{k}s) = \begin{cases} M \text{sign}(\bar{k}s), & |s| > 1/\bar{k}, \\ M\bar{k}s, & |s| \leq 1/\bar{k}. \end{cases}$$

Амплитуда выбирается также как и в системе с разрывным управлением (1.8), что при $|s(0)| > 1/\bar{k}$ обеспечит $|s(t)| \leq 1/\bar{k} \leq \Delta, t > t_0$, а выбор $\bar{k} \geq 1/\Delta$ – желаемую точность стабилизации и, как следствие, выполнение (1.10) и (1.3).

Существенно, что в отличие от разрывного управления с постоянной амплитудой, область изменения которого одинакова на протяжении всего процесса управления, значения sat-управления с постоянными полками автоматически уменьшаются по модулю в установившемся режиме (также как и значения линейного управления). Это происходит за счет стабилизации переменных состояния, и при $t > t_1$ управляющий сигнал обрабатывает только внешнее возмущение $\eta_3(t)$ и малые незатухающие составляющие.

Наибольшую сложность представляют объекты с несогласованными возмущениями (когда условия (1.4) не выполняются), которые нельзя непосредственно компенсировать или подавить с помощью истинного управления. В задаче слежения к таким возмущениям относятся также производные задающих воздействий. При этом задача обеспечения инвариантности по отношению к возмущениям ставится только для регулируемых выходов (ошибок слежения), так как остальные переменные вынуждены обрабатывать соответствующие внешние воздействия. Для синтеза следящей системы в предположении о гладкости внешних воздействий в рамках классического подхода пространство состояний расширяется за счет генераторов задающих и возмущающих воздействий, а также соответствующих динамических наблюдателей и идентификаторов параметров [63, 141]. При этом динамический порядок замкнутой системы может увеличиться по сравнению с размерностью модели объекта управления в пять раз и больше, если характер внешних воздействий (и

соответствующие автономные модели) существенно меняется в процессе управления. Если удастся составить модель, которая достаточно точно отражает динамику внешних возмущений, то путем расширения пространства состояний теоретически достигается асимптотическая стабилизация ошибок слежения.

Еще один подход заключается в представлении модели объекта управления в канонической или блочной форме вход–выход, с дифференцированием внешних сигналов. В процессе получения этой формы порождаются смешанные переменные – функции от переменных состояния с аддитивными внешними воздействиями и их производными [14, 33, 35]. Для объекта (1.1) в предположении о дифференцируемости внешних возмущений $\eta_{1,2}(t)$ каноническая система в смешанных переменных имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2, \bar{x}_2 = \bar{x}_3, \\ \dot{\bar{x}}_3 &= f(x) + b(x)u + \bar{\eta}_3(t),\end{aligned}\tag{1.11}$$

где $\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_2 + \eta_1(t), \bar{x}_3 = x_3 + \eta_2(t) + \dot{\eta}_1(t), \bar{\eta}_3(t) = \eta_3(t) + \dot{\eta}_2(t) + \ddot{\eta}_1(t)$. В последнем уравнении (1.11) в аргументах функций $f(x), b(x)$ для удобства синтеза оставлены исходные переменные. Структурно система (1.11) повторяет систему (1.1), (1.4) с согласованными возмущениями, так как все неопределенности сосредоточены в пространстве управления и подлежат компенсации или подавлению с помощью описанных выше законов управления.

Особенность данного подхода к обеспечению инвариантности заключается в том, что задача оценивания по отдельности внешних воздействий не рассматривается, порождающие их автономные модели в построения не вводятся. В предположении, что выходная переменная измеряется $\bar{x}_1 = x_1$, на основе преобразованной системы (1.11) с неопределенным входом строится наблюдатель с «силовыми» корректирующими воздействиями для оценивания смешанных переменных и неопределенностей, по которым формируется обратная связь, что приводит к

увеличению динамического порядка замкнутой системы не более чем в два раза. Но, как правило, в данном случае достигается ε -инвариантность выходной переменной по отношению к внешним несогласованным возмущениям.

Однако указанные подходы не применимы в случае, когда внешние несогласованные возмущения и другие неопределенности модели не являются достаточно гладкими и не подлежат дифференцированию. Примером могут служить ударные нагрузки и силы сухого трения при управлении механическими объектами с учетом динамики исполнительных устройств [7, 12, 98, 103]. В частном случае, когда негладкое возмущение отделено от истинного управления одним интегратором, можно подавить его с помощью “вихревого” управления с непрерывной и разрывной составляющими. Результат достигается за счет организации в системе колебательного переходного процесса, при котором часть переменных состояния автоматически компенсирует влияние неизвестных слагаемых [30].

В общем случае при воздействии на объект управления внешних несогласованных возмущений, оценивание и компенсация или подавление которых не представляются возможными с помощью истинного управления, остается использовать возможности подавления возмущений с помощью локальных связей. Методологической основой для реализации такого подхода являются декомпозиционные методы [22] и блочный принцип управления [15, 23, 35, 36, 37, 40, 62, 75]. В рамках этого подхода с помощью невырожденной замены переменных уравнения внешней динамики приводятся к блочной форме вход–выход с аффинным вхождением фиктивных и истинных управлений. Она состоит из элементарных блоков, в каждом из которых размерность управляемых переменных равна рангу матрицы перед фиктивными управлениями, в качестве которых выступают переменные следующего блока. Последовательно (сверху вниз) формируемые стабилизирующие локальные связи в каждом блоке в итоге

обеспечиваются выбором истинного управления. При получении блочной формы внешние воздействия не дифференцируются и не участвуют в преобразованиях, но при блочной организации они становятся согласованными с фиктивными управлениями, и при надлежащем выборе фиктивных управлений их можно подавить с некоторой точностью.

Заметим, что мехатронные системы, которые рассматриваются в качестве объектов управления в диссертационной работе, функционируют в условиях несогласованных параметрических неопределенностей и внешних возмущений, поэтому блочный принцип управления выступает естественным подходом к управлению подобными системами.

Поясним суть блочного принципа управления на примере системы (1.1), которая является частным случаем блочной формы и состоит из трех элементарных блоков первого порядка. В первом и втором уравнениях переменные x_2 и x_3 соответственно трактуются как фиктивные управления, с которыми согласованы ограниченные возмущения η_1 и η_2 соответственно. Требование гладкости к внешним возмущениям не предъявляется.

Возникает вопрос о выборе вида стабилизирующих функций в фиктивных и истинном управлениях, которые обеспечили бы инвариантность выходной переменной по отношению к внешним возмущениям путем их подавления. Как показано выше, классическими методами подавления внешних и параметрических ограниченных возмущений, действующих в пространстве управления, являются: 1) непрерывные линейные обратные связи с большими коэффициентами усиления; 2) ограниченные по модулю разрывные управления с организацией скользящих режимов. При этом только управления первого типа (в силу гладкости) можно использовать для формирования локальных связей. Еще раз подчеркнем, что с помощью линейных локальных связей в системе с несогласованными возмущениями можно обеспечить стабилизацию регулируемой переменной только с некоторой точностью (1.3).

Для системы (1.1) рассмотрим стандартную пошаговую процедуру блочного синтеза линейных локальных связей с большими коэффициентами при воздействии несогласованных ограниченных возмущений [62].

Шаг 1. В первом уравнении системы (1.1) введем линейную локальную связь $x_2^* = -k_1 x_1$, $k_1 = \text{const} > 0$ и невязку между фактическим и выбранным фиктивным управлением

$$e_2 = x_2 - x_2^* = x_2 + k_1 x_1. \quad (1.12)$$

С учетом обозначения $e_1 = x_1$ и (1.12) первое уравнение системы (1.1) примет вид

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2 + \eta_1. \quad (1.13)$$

Шаг 2. Запишем дифференциальное уравнение для невязки (1.12) в силу (1.1), (1.13): $\dot{e}_2 = x_3 + \eta_2 + k_1 \dot{e}_1 = -k_1^2 e_1 + k_1 e_2 + x_3 + \eta_2 + k_1 \eta_1$, где сформируем комбинированное фиктивное управление с линейной стабилизирующей составляющей $x_3^* = k_1^2 e_1 - k_2 e_2$, $k_2 = \text{const}, k_2 > k_1$ и невязку между фактическим и выбранным фиктивным управлением

$$e_3 = x_3 - x_3^* = x_3 - k_1^2 e_1 + k_2 e_2. \quad (1.14)$$

С учетом (1.14) второе уравнение системы (1.1) примет вид

$$\dot{e}_2 = -(k_2 - k_1) e_2 + e_3 + \eta_2 + k_1 \eta_1. \quad (1.15)$$

Шаг 3. Запишем дифференциальное уравнение для невязки (1.14) в силу (1.1), (1.15):

$$\begin{aligned} \dot{e}_3 = f(x) + b(x)u + \eta_3(t) - k_1^2 \dot{e}_1 + k_2 \dot{e}_2 = k_1^3 e_1 - (k_1^2 + k_2^2 - k_2 k_1) e_2 + k_2 e_3 + \\ + f(x) + b(x)u + \eta_3 + k_2 \eta_2 + (k_2 k_1 - k_1^2) \eta_1. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для простоты изложения рассмотрим случай полной определенности функций $f(x), b(x)$, что позволяет выбрать комбинированное истинное управление в виде

$$u = -(k_1^3 e_1 - (k_1^2 + k_2^2 - k_2 k_1) e_2 + k_2 e_3 + f(x) + \varphi(e_3)) / b(x). \quad (1.17)$$

Замкнутая подсистема (1.16), (1.17) примет вид

$$\dot{e}_3 = -\varphi(e_3) + \eta_3 + k_2\eta_2 + (k_2k_1 - k_1^2)\eta_1. \quad (1.18)$$

Стабилизирующая составляющая $\varphi(e_3)$ выбирается одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} 1) \varphi(e_3) &= M \operatorname{sign}(e_3); \\ 2) \varphi(e_3) &= k_3 e_3; \\ 3) \varphi(e_3) &= M \operatorname{sat}(\bar{k}_3 e_3), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $M, k_3, \bar{k}_3 = \operatorname{const} > 0$. Как показано выше, в первом случае (1.19) при выборе амплитуды на основе неравенства

$$M > H_3 + k_2 H_2 + (k_2 k_1 - k_1^2) H_1 \quad (1.20)$$

выполняются условия $e_3 \dot{e}_3 < 0$. За конечное время $t > t_0 > 0$ на плоскости $e_3 = 0$ возникнет скользящий режим, и динамический порядок системы понизится. Во втором и третьем вариантах (1.19) при

$$k_3 > \frac{H_3 + k_2 H_2 + (k_2 k_1 - k_1^2) H_1}{\Delta_3}, \quad \bar{k}_3 > \frac{1}{\Delta_3}, \quad \Delta_3 > 0 \quad (1.21)$$

соответственно (в третьем – с учетом (1.20)) обеспечивается сходимость переменной в заданную окрестность нуля

$$|e_3(t)| \leq \Delta_3, \quad t > t_0. \quad (1.22)$$

Процедуру выбора больших коэффициентов k_1, k_2 рассмотрим именно для этого, более общего случая. Введем функцию Ляпунова в виде суммы двух слагаемых $V = V_1 + V_2$, $V_i = \frac{1}{2} e_i^2, i = 1, 2$ и оценим их производные в силу (1.2), (1.13), (1.15):

$$\begin{aligned} e_1 \dot{e}_1 &\leq |e_1| (|e_2| + H_1 - k_1 |e_1|), \\ e_2 \dot{e}_2 &\leq |e_2| (|e_3| + H_2 + k_1 H_1 - (k_2 - k_1) |e_2|). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Из неравенств (1.23) следует, что достаточные условия устойчивости $\dot{V} < 0$ выполняются, если

$$\begin{aligned}
k_1 &> \frac{H_1 + \Delta_2}{\Delta_1}, |e_3| \leq \Delta_3, |e_2| \leq \Delta_2, |e_1| > \Delta_1, \\
k_2 &> \frac{H_2 + k_1 H_1 + \Delta_3}{\Delta_2} + k_1, |e_3| \leq \Delta_3, |e_2| > \Delta_2.
\end{aligned}
\tag{1.24}$$

Таким образом, задав желаемую точность стабилизации, при последовательном (сверху вниз) выборе больших коэффициентов на основе неравенств (1.24), (1.21) переменные замкнутой системы (1.13), (1.15), (1.18), (1.19) последовательно (снизу вверх) сходятся в заданные окрестности нуля:

$$|e_3(t)| \leq \Delta_3 \Rightarrow |e_2(t)| \leq \Delta_2 \Rightarrow |e_1(t)| \leq \Delta_1, \tag{1.25}$$

и цель управления (1.3) достигается.

При выборе больших коэффициентов следует учитывать, что с ростом k_1 улучшается точность (1.3) (в предельном случае $\Delta_1 \rightarrow 0$ при $k_1 \rightarrow +\infty$) и сокращается время сходимости, но в силу неограниченности линейных управлений это приводит к известной проблеме всплесков вначале переходных процессов. С другой стороны, в практических приложениях ресурсы управления всегда ограничены, поэтому существует верхняя граница для выбора коэффициента $k_1 \leq k_{1\max}$ и соответствующая минимально достижимая ошибка слежения $\Delta_{1,\min} \leq \Delta_1$.

Что касается ограниченного управления в виде sat-функции, то оно не является гладким, что, с одной стороны, не является препятствием при его использовании в корректирующих воздействиях наблюдателей состояния систем с возмущениями [28], но, с другой стороны, сужает возможности его применения в качестве фиктивных управлений в практических задачах.

Подводя итоги, можно сделать вывод о том, что для универсального формирования инвариантных локальных связей требуются гладкие аналоги sat-функции, которыми являются трансцендентные функции из класса так называемых S-образных функций (арктангенс, гиперболический тангенс, логистическая функция, сигма-функция и т.п.). В рамках диссертационного исследования для этих целей будет использоваться сигма-функция

$$\sigma(kx) = \frac{2}{1 + \exp(-kx)} - 1, \quad k = \text{const} > 0,$$

(ее свойства будут описаны в разделе 2.1), которая также как и гиперболический тангенс выражается через экспоненту, но имеет более простую запись. Кроме того, производные сигма-функции всюду ограничены и рекурсивно выражаются через первообразную, что является удобным инструментом для анализа и синтеза нелинейного управления.

Выделим еще одно важное свойство сигма-функций: также как при использовании тригонометрических рядов Фурье, с помощью сигма-функций можно с любой точностью аппроксимировать любую ограниченную функцию с конечным числом разрывов. Это свойство используется в задачах нейросетевого обучения, где сигмоиды служат функциями активации нейронов. Суть заключается в том, что из набора сигмоидальных функций формируется нейронный слой, выходом которого является их линейная комбинация. Вычисление параметров нейронной сети (весовых коэффициентов и смещений) происходит в процессе обучения по заранее известной обучающей выборке (англ. “data set”) с целью минимизации функции потерь, в качестве которой выступает среднеквадратическая ошибка между целевыми значениями обучающей выборки и выходом нейронной сети. После завершения процесса обучения нейронная сеть применяется к новым данным и позволяет прогнозировать целевые значения на основе настроенных при обучении параметров [100].

В данной работе сигма-функции будут использоваться непосредственно в контуре обратной связи в качестве фиктивных и истинных управлений. Параметры сигмоидального стабилизирующего регулятора будут выбираться на этапе синтеза исходя из наихудших допустимых значений параметров объекта управления и границ изменения внешних воздействий. В процессе регулирования сигмоидальные фиктивные и истинные управления за конечное время сходятся к согласованным с ними неизвестным сигналам и повторяют их форму с наперед заданной точностью.

При этом автоматически реализуется механизм компенсации возмущений, в том числе, не принадлежащих пространству истинного управления, что и обеспечивает инвариантность выходных переменных. Таким образом, предлагаемый в диссертационной работе метод синтеза сигмоидальных обратных связей принципиально отличается от способа использования сигмоидальных функций в задачах нейросетевого управления, где параметры регулятора настраиваются по заранее известной обучающей выборке, при формировании которой требуется предусмотреть все возможные модификации регулируемого процесса [73].

Ограниченность сигмоидальных обратных связей – их несомненное преимущество по сравнению с линейными обратными связями с большими коэффициентами. К сравнительным недостаткам метода можно отнести более сложную вычислительную реализацию, но, учитывая постоянно наращиваемую мощность современных управляющих микропроцессоров, это не является серьезным препятствием для его использования в системах автоматического управления современными и перспективными техническими объектами.

1.2. Рассматриваемые типы мехатронных систем

В данном разделе дано описание типа мехатронных систем, которые рассматриваются в диссертационной работе в качестве объектов управления, приведен краткий обзор методов управления.

В главе 3 будут рассматриваться электромеханические полноприводные системы. Функциональная схема автоматического управления электромеханическим объектом представлена на рис. 1.1.

Динамика механической подсистемы с n степенями свободы описывается уравнениями Лагранжа второго рода [69]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{2i}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{1i}} = v_i + \eta_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.26)$$

где $L = K - P$ – функция Лагранжа, K – полная кинетическая энергия системы, P – полная потенциальная энергия системы, q_{1i} – обобщенные координаты объекта, q_{2i} – обобщенные скорости объекта, v_i – обобщенные моменты, развиваемые исполнительными устройствами (ИУ), η_i – часть обобщенных моментов, трактуемых как внешние возмущения, $i = \overline{1, n}$.

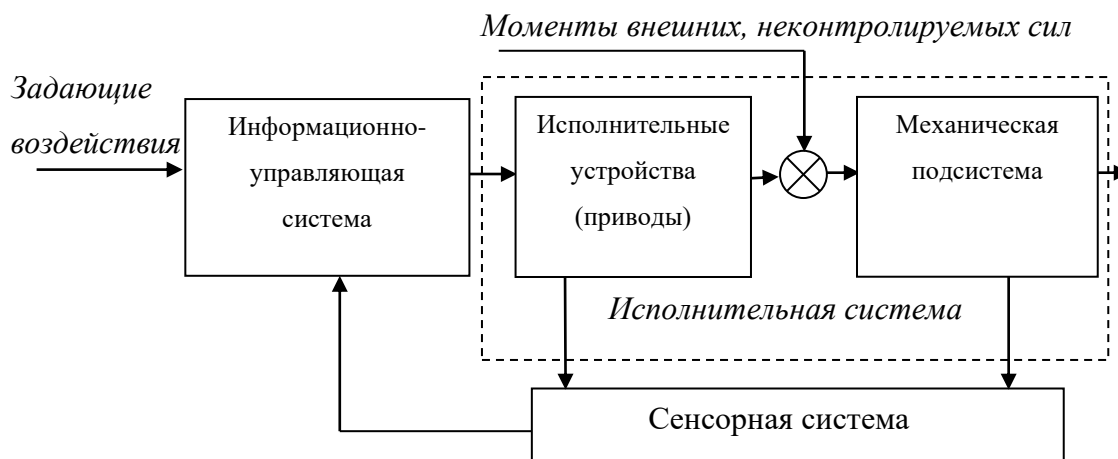


Рис. 1.1. Функциональная схема
электромеханического объекта управления

Для удобства дальнейшего анализа запишем уравнения (1.26) в нормальной форме [37]:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= I^{-1}(q_1)[v - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta(t)], \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $q_1 = \text{col}(q_{11}, \dots, q_{1n}) \in Q_1 \subset R^n$ – вектор обобщенных координат, $q_2 = \text{col}(q_{21}, \dots, q_{2n}) \in Q_2 \subset R^n$ – вектор обобщенных скоростей; $I_{n \times n}(q_1) > 0$ – нелинейная положительно определенная матрица инерции, $\det I^{-1}(q_1) \neq 0$; $C_{n \times n}(q_1, q_2)$ – матрица центробежных и кориолисовых сил; $G_{n \times 1}(q_1)$ – вектор гравитационных сил; $\eta(t) = \text{col}(\eta_1, \dots, \eta_n) \in R^n$ – вектор внешних возмущений; $v = \text{col}(v_1, \dots, v_n) \in R^n$ – вектор обобщенных моментов ИУ.

В качестве ИУ рассматриваются двигатели постоянного тока [30, 72] с жестким типом сочленений и учитываемой редуцированной динамикой [37]:

$$\dot{v} = -Av - Dq_2 + Bu, \quad (1.28)$$

где A , D , B – диагональные матрицы с положительными постоянными коэффициентами передачи, в частности $B = \text{diag}(b_i)$, $b_i = \text{const} > 0$ $i = \overline{1, n}$; $u \in R^n$ – вектор напряжений питания якорной цепи электроприводов.

В модели (1.27)–(1.28) внешние возмущения $\eta(t)$ действуют на механическую подсистему и несогласованы с истинным управлением, следовательно, они не могут быть непосредственно компенсированы или подавлены за счет управления u . Возмущения имеют физическую природу, это моменты внешних сил, а также сил, не учтенных в математической модели. Они могут быть связаны с деформацией элементов системы, с неидеальностями исполнительных устройств и т.п.

Параметры матриц электромеханической системы часто неопределенны. Например, моделью (1.27) можно описать динамику многозвенного робота-манипулятора [37, 81, 132], способного выполнять различные работы и перемещать грузы в рабочем пространстве. В процессе функционирования объекта масса груза может изменяться неконтролируемым образом, что приводит к появлению параметрических неопределенностей в матрицах $I(q_1)$, $C(q_1, q_2)$, $G(q_1)$ и усложняет задачу управления. Методы обеспечения инвариантности по отношению к внешним возмущениям и параметрическим неопределенностям были детально описаны в предыдущем разделе.

Помимо наличия несогласованных возмущений и параметрических неопределенностей, модель (1.27) отличается существенной нелинейностью. Так, нелинейные составляющие присутствуют в матрицах $I(q_1)$ и $C(q_1, q_2)$ механической подсистемы. Выделим некоторые из общих подходов к решению задач управления для нелинейных систем. Классически, опираясь на хорошо разработанную линейную теорию, законы управления для нелинейных систем проектировали на основе их линеаризации в окрестности желаемого положения [82, 87, 134, 140]. Это обеспечивает локальную

стабилизацию, которая справедлива лишь в некоторой окрестности линеаризуемого положения. Другой подход основан на свойстве пассивности механических систем, а именно, $q_1^T [\dot{I}(q_1) - 2C(q_1, q_2)] q_1 \equiv 0$, построении для них функций Ляпунова и глобальной стабилизации [89, 123, 139]. На использовании функций Ляпунова также основан метод обратного хода (backstepping) [104, 131]. Еще одним подходом к синтезу управления является приведение системы с помощью невырожденной замены переменных к каноническому или квазиканоническому виду [39, 50, 113, 124]. Данный специальный вид систем упрощает построение законов управления и позволяет обеспечивать глобальную стабилизацию. В качестве законов управления нередко используют традиционный ПИД-регулятор [1, 2, 3, 86, 125, 126] и его модификации [110]. Следует отметить, что многие из представленных подходов требуют параметрической определенности модели объекта управления, либо дополнения алгоритмами идентификации.

Моделью (1.27)–(1.28) также может быть описана динамика двухроторной электромеханическая система (далее TRMS – от англ. Twin Rotor MIMO System), которая рассматривается в главе 4. Она состоит из двух перпендикулярных винтов с исполнительными устройствами на каждом из них и имеет две регулируемые координаты – углы тангажа и рысканья.

TRMS предназначена для апробации авторских алгоритмов управления, учитывающих указанные особенности математической модели, с дальнейшим применением их в реальном техническом устройстве – вертолете, динамика которого во многом схожа с динамикой TRMS. И для вертолета, и для TRMS характерно наличие перекрестных связей между винтами. Отличие TRMS от вертолета состоит в том, что данная система закрепляется на неподвижной опоре, ее положение регулируется изменением угловых скоростей винтов. В вертолете угловые скорости вращения винтов практически постоянны, а его положение регулируется изменением углов атаки лопастей.

Сложность управления TRMS связана с существенной нелинейностью математической модели объекта управления, наличием параметрических неопределенностей и внешних несогласованных возмущений. Отдельно отметим наличие перекрестных связей между винтами, которое приводит к сильному взаимовлиянию регулируемых координат, а также сил сухого трения. Еще одной проблемой является необходимость учитывать конструктивные ограничения на переменные состояния и управления, которые имеются для TRMS.

Отметим подходы к управлению, которые исследователи применяли конкретно к TRMS: управление с помощью ПИД-регулятора и его модификаций [80, 90], метод обратного хода [130], техника скользящих режимов [88, 120].

Отдельно стоит отметить проблему управления при наличии сил сухого трения, препятствующих желаемому движению объекта. Описание моделей сухого трения представлено в [27]. Возможным подходом к управлению при наличии сухого трения является его компенсация посредством ввода динамических моделей трения и наблюдателей состояния [98, 103]. Однако его реализация требует параметрической определенности модели объекта управления, наличия всех необходимых измерений и адекватного построения моделей сил трения. Другим подходом выступают силовые методы, основанные на подавлении сил сухого трения за счет выбора ресурсов управления, превышающих предельно возможные коэффициенты трения [69]. В качестве недостатка использования такого подхода можно отметить излишний расход ресурсов управления, когда фактические значения параметров оказываются существенно меньше заложенных в расчетах наихудших значений.

Отметим, что в существующих работах по управлению TRMS [80, 88, 90, 120, 130] не ставят задачу выполнения конструктивных ограничений на переменные состояния и управления, которые обычно всегда имеются на

практике. Поэтому особо актуальной является проблема разработки аналитических методов, учитывающих данные ограничения.

В качестве еще одного мехатронного объекта, описываемого моделью, аналогичной (1.27)–(1.28), но с недостатком управлений (в зарубежной литературе «underactuated system»), является рассматриваемая в главе 5 тележка–кран с закрепленным на ней грузом. Данная модель является простым, но достаточно адекватным представлением реальной и очень важной промышленной системы – транспортировочного крана, широко используемого для перемещения массивных грузов. При функционировании данного объекта предъявляются требования по скорости и безопасности транспортировки различных грузов в заданное место.

Модель такого объекта управления становится параметрически неопределенной, когда массы тележки и груза точно не известны. Сложность управления подобной системой возникает из-за наличия двух регулируемых переменных и только одного управляющего воздействия. В настоящее время разработано множество алгоритмов управления системами с недостатком управляющих воздействий. Классически, ориентируясь на линейную теорию управления, законы управления строили на основе линеаризации подобных систем [82, 85]. Такие методы позволяют добиться локальной стабилизации в окрестности линеаризуемого положения. Другой подход основан на свойствах пассивности исследуемых систем, построении для них функций Ляпунова и глобальной стабилизации [97, 116, 121, 125]. В частности, стандартным решением является использование пропорционально-дифференцирующего (ПД) регулятора, зависящего от положения и скорости, а также пропорционально-интегрально-дифференцирующего (ПИД) регулятора [97, 116, 125]. Строятся различные модификации данных законов. Например, в [121] синтезируют модифицированный закон управления, добавляя в ПД-регулятор угловую координату с ее производной и, тем самым, улучшая качество переходных процессов. Актуальной проблемой является построение таких законов управления, которые минимизировали бы

амплитуду колебаний груза, что приводило бы к повышению надежности системы.

Примером транспортировочного крана является кран мостового типа, который представляет собой конструкцию из одной или нескольких балок (опорная балка – мост и концевые балки), закрепленных с обоих концов на потолочных опорах промышленного здания. На подкрановых путях располагается грузовая тележка с крюком или грейфером. За счет электродвигателей она осуществляет подъем и перемещение груза по рельсам, установленным на балке. Наиболее простой и дешевой конструкцией является однобалочный кран, обладающий относительно небольшой грузоподъемностью (обычно до 10-16 тон). Сфера применения однобалочных кранов достаточно широка, а сам механизм практически незаменим на промышленных предприятиях. Подобные краны используются в строительной сфере, при различной сортировке, в областях переработки, при ремонтных работах, а также для проведения разгрузочных и погрузочных работ в складских помещениях. В разделе 5.3 будет описана апробация разработанного алгоритма управления для однобалочного мостового крана типа СХТС10-ТОН.

При построении законов управления зачастую опускают задачу наблюдения, считая, что все сигналы, необходимые для реализации закона управления в форме обратной связи, известны. На практике доступной для измерений может оказаться только часть переменных состояния. Так, для мехатронных систем (1.27)–(1.28) обычно имеются измерения выходных переменных – положений объекта q_1 и обобщенных моментов ИУ v . Закон стабилизирующего управления только по выходным переменным можно сформировать в ограниченных случаях пассивных систем [17, 47], а в общем случае для управления требуются производные выходных переменных. Если в системе управления по тем или иным причинам (ограничения массогабаритных характеристик системы, которые могут быть связаны с

жесткими условиями функционирования объекта; рост финансовых затрат на систему управления) нецелесообразно устанавливать полный комплект датчиков, то в связи с этим возникает задача наблюдения, цель которой заключается в получении оценок неизмеряемых переменных состояния. Для этого в контуре обратной связи используют наблюдатели состояния [76, 117]. Задача наблюдения сводится к стабилизации ошибок наблюдения путем адекватного выбора корректирующих воздействий наблюдателя.

Традиционно корректирующие воздействия принимаются в виде линейных функций [106], что в системах с неопределенностями может приводить к существенному всплеску оценочных сигналов в начале переходного процесса. В [19, 32, 133] рассматриваются наблюдатели на скользящих режимах, которые являются нечувствительными к неопределенностям и внешним возмущениям, и при определенных условиях позволяют получить не только оценки переменных состояния, но и внешних возмущений без использования их динамической модели [101]. В качестве недостатков таких наблюдателей стоит отметить, что они требуют высокого качества измеряемых сигналов и при наличии шумов в измерениях теряют свою работоспособность. Цифровая реализация наблюдателей на скользящих режимах требует использования методов первого порядка (Эйлера, Адамса) с очень мелким шагом интегрирования, что приводит к увеличению времени счета.

При наличии шумов в измерениях оценки переменных состояния позволяет получить фильтр Калмана [46, 92, 102, 105, 115]. Он выполняет двойную функцию, являясь и наблюдателем состояния и фильтром, и при определенных условиях позволяет получить оптимальную оценку в плане минимума среднеквадратической ошибки оценивания. Отметим, что для реализации фильтра Калмана, в частности, необходимо достаточно точное знание модели исследуемого объекта. Исходная работа Р. Калмана [105] была разработана для дискретных линейных систем. Существуют модификации фильтра Калмана – фильтр Калмана-Бьюси для непрерывных

систем [77, 84, 99], обобщение фильтра Калмана для нелинейных систем [93, 118, 142], а также другие модификации [91, 119].

Актуальной задачей представляется ввод таких корректирующих воздействий, которые, с одной стороны, не приводили бы к всплескам оценочных сигналов (как в наблюдателях с линейными корректирующими воздействиями с большими коэффициентами). С другой стороны, могли бы обеспечить более высокое качество оценочных сигналов и не были бы столь требовательны к вычислительным ресурсам (по сравнению с разрывными корректирующими воздействиями). В диссертационной работе сигма-функции используются не только для синтеза инвариантной обратной связи, но также и при синтезе наблюдателей состояния, учитывая, что эти функции являются гладкими аналогами функции знака.

Из краткого обзора методов управления мехатронными системами следует, что по-прежнему актуальной проблемой является разработка таких методов, которые учитывали бы описанные особенности систем, в частности, обеспечили бы инвариантность к внешним несогласованным возмущениям и параметрическим неопределенностям и позволили учитывать имеющиеся ограничения на переменные состояния и управления.

Поскольку модель (1.27)–(1.28) представляет собой блочную форму вход–выход, где в механической подсистеме фиктивными управлениями выступают обобщенные моменты ν , для синтеза обратных связей целесообразно применить блочный принцип управления. В качестве локальных связей в блочном принципе управления предлагается использовать гладкие и ограниченные S-образные сигма-функции. Предполагается, что ограниченность сигма-функций приведет к уменьшению всплесков в переходном процессе, характерных для традиционных линейных управлений, что даст должный эффект и предоставит возможность удовлетворить конструктивным ограничениям на переменные состояния и управления на стадии синтеза.

Перечислим некоторые общие свойства мехатронных объектов, рассматриваемых в содержательных главах 2–5 диссертационной работы:

1) при описании математической модели объектов управления допускается ее параметрическая неопределенность, причем неизвестные параметры могут меняться в некоторых диапазонах с известными границами; задача идентификации неизвестных параметров не ставится;

2) рассматриваемые объекты являются управляемыми и наблюдаемыми относительно выходных (регулируемых) переменных, эти свойства имеют место при всех допустимых вариациях неизвестных параметров;

3) на механическую подсистему действуют внешние возмущения, несогласованные с истинным управлением, которые полагаются неизвестными детерминированными ограниченными функциями времени, требования гладкости к ним не предъявляются;

4) при решении задачи отслеживания выходными переменными заданных сигналов предполагается, что аналитический вид задающих воздействий неизвестен, имеются только их текущие значения;

5) динамические генераторы внешних возмущений и задающих воздействий в контуре обратной связи отсутствуют. Известными полагаются только диапазоны изменения внешних возмущений и производных задающих воздействий;

б) измеряются положения объектов q_1 (их скорости не измеряются), задающие воздействия и моменты ν , развиваемые ИУ. Шумы в измерениях отсутствуют, все задачи рассматриваются в детерминированной постановке.

1.3. Выводы к главе 1

В данной главе представлен краткий обзор методов управления мехатронными системами при наличии параметрических неопределенностей, действии внешних несогласованных возмущений и при неполных

измерениях. Отражены проблемы, возникающие при использовании традиционных методов управления. В описанных условиях функционирования мехатронных систем пояснена мотивация применения блочного принципа управления и ввода нового типа обратных связей в виде S-образных гладких и ограниченных сигма-функций, которые будут использоваться и при проектировании законов управления в форме обратной связи, и при синтезе корректирующих воздействий наблюдателей состояния.

Таким образом, методологическую основу для разработки аналитических методов синтеза инвариантных систем при наличии несогласованных негладких возмущений, в работе составят:

- принцип блочного управления, применение которого для систем, представленных в виде блочной формы управляемости, позволяет декомпозировать задачу синтеза на последовательно решаемые элементарные подзадачи формирования сначала фиктивных, а потом и истинных управлений;

- методы синтеза систем с разрывными управлениями, функционирующими в скользящем режиме, обеспечивающие с помощью ограниченного по модулю управляющего сигнала инвариантность по отношению к согласованным возмущениям (т.е. к возмущениям, действующим в пространстве управления и имеющим такой же относительный порядок).

Глава 2. Декомпозиционная процедура синтеза сигмоидальных локальных связей с учетом заданной точности и заданного времени регулирования

В разделе 2.1 описаны свойства сигмоидальной функции, на примере элементарной возмущенной системы формализованы особенности синтеза сигмоидальной обратной связи. Далее для нелинейных одноканальных систем, представленных в треугольной форме вход-выход, решается задача слежения. В разделе 2.2 введена модель объекта управления, формализована постановка задачи слежения в условиях действия внешних несогласованных возмущений и при наличии параметрических неопределенностей. Целевыми условиями являются заданные точность и время регулирования. В разделе 2.3 в рамках блочного принципа управления разработана процедура синтеза сигмоидальных локальных связей. В разделе 2.4 приведены результаты моделирования разработанных методов управления применительно к задаче синтеза системы управления перевернутым маятником.

2.1. Особенности сигмоидальных обратных связей

Рассмотрим гладкую и ограниченную сигма-функцию

$$\sigma(kx) = \frac{2}{1 + \exp(-kx)} - 1, \quad k = \text{const} > 0, \quad (2.1)$$

которая определена на всей числовой оси и имеет следующие свойства: $\sigma(-kx) = -\sigma(kx)$, $\sigma(kx) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} kx/2$, $\sigma(kx) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \text{sign}(x)$. В аргументе специально выделен множитель k , который в дальнейших построениях играет роль большого коэффициента усиления в малой окрестности нуля. Производная сигма-функции имеет рекурсивный вид:

$$\sigma'(kx) = k(1 - \sigma^2(kx)) / 2 > 0, \quad x \in R, \quad \sigma'(-kx) = \sigma'(kx).$$

Для упрощения анализа нелинейной сигма-функции установим ее аналогию с кусочно-линейной sat-функцией. Рассмотрим некоторую

окрестность нуля с радиусом $\Delta > 0$. Для сигма-функции и ее производной в указанных интервалах справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sigma(k\Delta) < |\sigma(kx)| < 1, \quad 0 < \sigma'(kx) < \sigma'(k\Delta), \quad |x| > \Delta; \\ \frac{\sigma(k\Delta)|x|}{\Delta} \leq |\sigma(kx)| \leq \sigma(k\Delta), \quad \sigma'(k\Delta) \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = \frac{k}{2}, \quad |x| \leq \Delta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Неравенства (2.2) демонстрируют, что при $|x| > \Delta$ сигма-функция близка к постоянной функции, а при $|x| \leq \Delta$ – к линейной (см. рис. 2.1). Для формализации абсцисс указанного разделения введем параметр $c = \text{const} > 0$: $|x| = \Delta = c/k$, который целесообразно выбирать из интервала

$$k\Delta = c \in [1, 3; 3], \quad (2.3)$$

где: $\pm 1,3$ – абсциссы точек перегиба первой производной $\sigma''(\pm 1,3) = 0$, при этом $\sigma(\pm 1,3) \approx \pm 0,57$, $\sigma'(\pm 1,3) \approx 0,34k$; ± 3 – абсциссы вершин сигма-функции, в которых ее кривизна достигает максимума, при этом $\sigma(\pm 3) \approx \pm 0,9$, $\sigma'(\pm 0,9) \approx 0,095k$ [33].

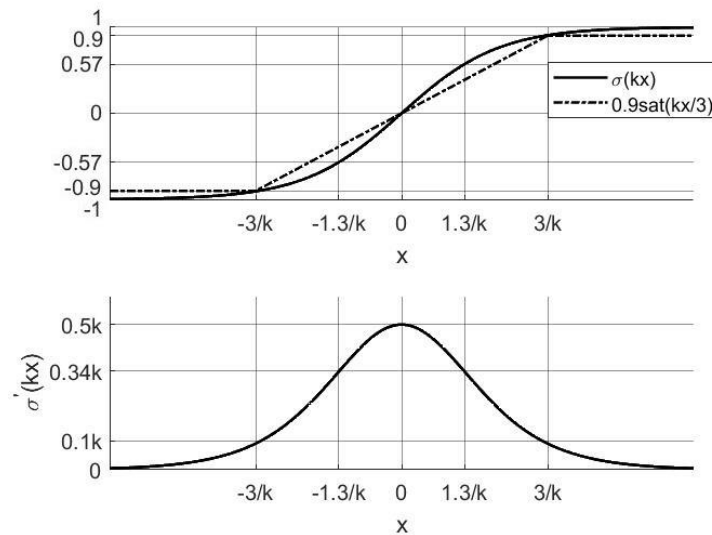


Рис. 2.1. Графики сигма-функции (сверху) и ее производной (снизу)

Обоснуем возможность использования сигма-функции в качестве обратной связи. Вначале установим устойчивость невозмущенной элементарной системы первого порядка

$$\dot{x} = u, \quad (2.4)$$

где управление принимается в виде сигма-функции

$$u = -m\sigma(kx) \quad (2.5)$$

с постоянной амплитудой $m = \text{const} > 0$.

Решение замкнутой системы (2.4)–(2.5) имеет вид [33]

$$x(t) = \frac{2}{k} \left(\ln \left(\sqrt{d^2 e^{-mkt} + 4} + d e^{-\frac{mk}{2}t} \right) - \ln 2 \right), \quad (2.6)$$

где $d = e^{kx(0)/2} - e^{-kx(0)/2}$.

Решение (2.6) асимптотически устойчиво: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. Отметим, что по

сравнению с решением

$$x(t) = x(0)e^{-mkt} \quad (2.7)$$

линейной системы $\dot{x} = -mkx$, решение (2.6) при $t \rightarrow +\infty$ является бесконечно

малой более низкого порядка: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = 0$, где $x_1(t)$ есть решение (2.7), а

$x_2(t)$ – решение (2.6) соответственно.

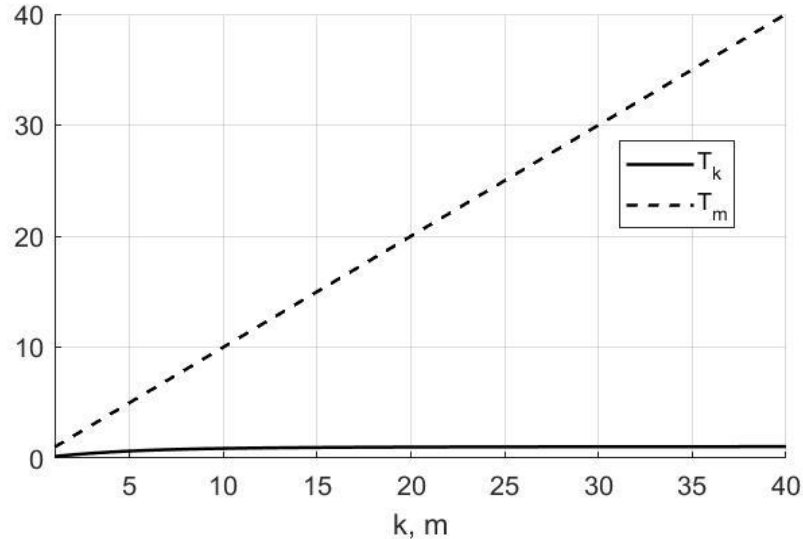
Для заданной окрестности нуля $\Delta = \text{const} > 0$: $|x(t)| \leq \Delta$, определим время сходимости $T = \text{const} > 0$ в нее на основе решения (2.6):

$$T = \frac{\ln \left(\frac{\left(e^{kx(0)/2} - e^{-kx(0)/2} \right)^2 e^{k\Delta}}{(e^{k\Delta} - 1)^2} \right)}{km}. \quad (2.8)$$

Чтобы проиллюстрировать зависимость времени сходимости (2.8) от параметров обратной связи k и m , введем следующие переменные

$$T_k = \frac{k}{\ln \left(\frac{\left(e^{kx(0)/2} - e^{-kx(0)/2} \right)^2 e^{k\Delta}}{(e^{k\Delta} - 1)^2} \right)}, \quad T_m = m,$$

которые показывают, во сколько раз уменьшается время сходимости по сравнению с $T=1$ при увеличении k и m соответственно. На рис. 2.2 представлены зависимости $T_k(k)$ и $T_m(m)$ для $x(0)=1$, $\Delta=0,05$.

Рис. 2.2. Графики $T_k(k)$ и $T_m(m)$

Таким образом, из (2.8) и рис. 2.2 следует, что время сходимости в большей степени определяется параметром m .

Далее поясним идею использования сигмоидальной обратной связи и выбора ее параметров в задаче обеспечения инвариантности на примере элементарной возмущенной системы

$$\dot{x} = f(t) + u, \quad (2.9)$$

где $x \in R$ – измеряемая переменная состояния, $f(t)$ – внешнее возмущение, которое описывается детерминированной, неизвестной, но ограниченной функцией времени, требование гладкости к ней не предъявляется, достаточно, чтобы она была кусочно-непрерывная. Переменную системы (2.9) можно трактовать как ошибку слежения, тогда $f(t)$ аддитивно включает производную задающего воздействия.

Ставится задача стабилизации системы (2.9) с помощью статической обратной связи. Управляющее воздействие u сформируем в виде сигма-функции (2.5).

Лемма 2.1. Если в системе (2.9), (2.5) внешнее возмущение ограничено известной константой $|f(t)| \leq F = \text{const} > 0, t \geq 0$, то тогда для любых сколь угодно малых $\Delta > 0, T > 0$ и любого начального значения $x(0)$ найдутся

такие положительные действительные числа \bar{k} и \bar{m} , что при любых $k \geq \bar{k}$, $m \geq \bar{m}$ выполнится неравенство

$$|x(t)| \leq \Delta, t \geq T. \quad (2.10)$$

Доказательство. Заданное $\Delta > 0$ (2.10) и коэффициент k свяжем параметрически (2.3), что сводит проблему выбора k к выбору c из указанного диапазона.

Формализуем для замкнутой системы (2.9), (2.5) достаточные условия устойчивости: введем функцию Ляпунова $V = x^2 / 2$ и оценим ее производную. Вне области $|x| \leq \Delta$ с учетом (2.2)–(2.3) имеем:

$$\dot{V} = x(f(t) - m\sigma(kx)) \leq |x|(F - m\sigma(c)). \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что неравенство $\dot{V} \leq |x|(F - m\sigma(c)) < 0$ справедливо, если

$$m^* > F / \sigma(c). \quad (2.12)$$

Выполнение (2.12) обеспечивает $|x(t)| \leq \Delta$ без учета времени сходимости, которое зависит от начального условия. В частном случае $|x(0)| \leq \Delta$ неравенство $|x(t)| \leq \Delta$ обеспечивается при (2.12) и $t \geq 0$, т.е. цель управления (2.10) достигается.

В общем случае $|x(0)| > \Delta$ для гарантированного достижения переменной состояния заданной области за заданное время $T > 0$ повысим нижнюю границу для выбора амплитуды (2.12). С учетом оценки решения системы (2.9) на интервале $t \in [0; T]$

$$|x(t)| \leq |x(0)| + (F - m\sigma(c))T \leq \Delta,$$

получим:

$$m \geq \bar{m} = \frac{1}{\sigma(c)} \left(\frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right) > m^*, |x(0)| > \Delta. \quad (2.13)$$

Таким образом, принятое значение c (2.3) определяет \bar{m} (2.13) и \bar{k}

$$k \geq \bar{k} = c / \Delta, \quad (2.14)$$

отвечающие цели управления (2.10) при любом $x(0)$. Выбор амплитуды m управления (2.5) на основе неравенства (2.13) гарантирует попадание переменной состояния системы (2.9) из любого начального условия в окрестность нуля за заданное время (и чем больше m , тем быстрее). Если переменная изначально находится в этой области, то гарантировано не покинет ее в процессе регулирования. Выбор большого коэффициента k на основе (2.14) обеспечивает заданный радиус этой окрестности (и чем больше k , тем меньше радиус). Лемма 2.1 доказана.

Замечание 2.1. В процессе доказательства леммы 2.1 формализованы достаточные условия (2.13), (2.14), гарантирующие выполнение целевых показателей (2.10). Однако предельный радиус окрестности нуля, достигаемой переменной $x(t)$ в стационарном режиме, будет несколько меньше заданного. Действительно, для замкнутой системы (2.9), (2.5) оценка производной функции Ляпунова (2.11) имеет вид:

$$\dot{V} = x(f(t) - m\sigma(kx)) \leq |x|(F - m\sigma(k|x|)).$$

В силу (2.13)–(2.14), (2.1) неравенство $\dot{V} < 0$ справедливо вне области

$$|x| \leq \tilde{\Delta}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{1}{k} \ln \frac{m+F}{m-F} < \Delta, \quad (2.15)$$

к которой асимптотически стремится $x(t)$ и которая меньше заданной (2.10). Ее радиус сокращается с ростом большого коэффициента k и амплитуды m . Для иллюстрации влияния параметров k и m на радиус области $\tilde{\Delta}$, введем переменные

$$\tilde{\Delta}_k = k, \quad \tilde{\Delta}_m = 1 / \left(\ln \frac{m+F}{m-F} \right),$$

которые показывают, во сколько раз уменьшается радиус области $\tilde{\Delta}$ по сравнению с $\tilde{\Delta} = 1$ при увеличении k и m соответственно. На рис. 2.3 приведены графики $\tilde{\Delta}_k(k)$ и $\tilde{\Delta}_m(m)$ при $F = 1$.

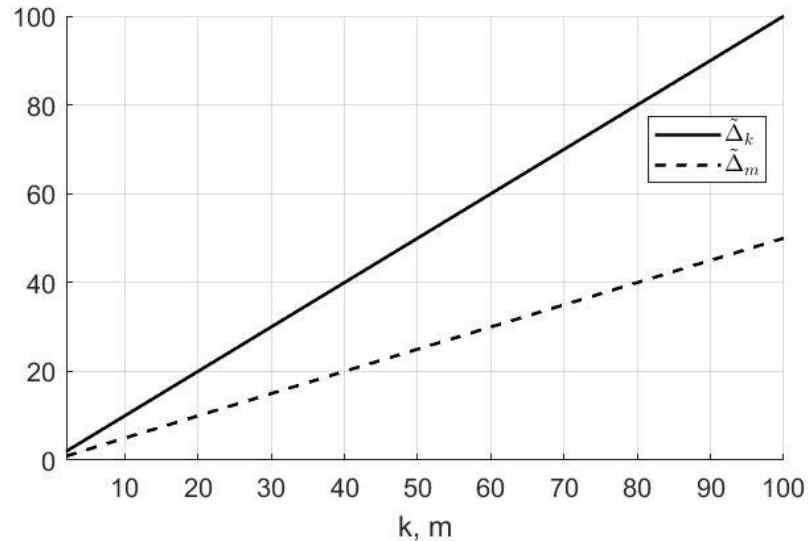


Рис. 2.3. Графики $\tilde{\Delta}_k(k)$ и $\tilde{\Delta}_m(m)$

Из рис. 2.3 видно, что на уменьшение радиуса области $\tilde{\Delta}$ в большей степени влияет увеличение большого коэффициента k .

Тем не менее, на практике целесообразно выбирать k и m как можно ближе к базовым значениям \bar{k} (2.14) и \bar{m} (2.13) в целях экономии ресурса управления.

Рассмотрим вопрос об оптимальном выборе параметра c из указанного диапазона (2.3). Принимая во внимание последующее использование сигма-функций для синтеза локальных связей в многомерных системах, в качестве критерия примем минимум базовой оценки модуля скорости управления. Для замкнутой системы (2.9) имеют место следующие выражения

$$\dot{u}(t) = -mk(1 - \sigma^2(kx))\dot{x} / 2; \quad 0 < 1 - \sigma^2(kx) \leq 1, \quad x \in R; \quad |\dot{x}(t)| < F + m < 2m, t \geq 0,$$

откуда следует оценка скорости изменения управления:

$$|\dot{u}(t)| < m^2k, \quad t \geq 0. \quad (2.16)$$

Из (2.16) с учетом (2.13) и (2.14) имеем целевое условие:

$$m^2k \geq \bar{m}^2(c)\bar{k}(c) = \frac{c}{\sigma^2(c)\Delta} \left(\frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right)^2 \rightarrow \min. \quad (2.17)$$

Для нахождения минимального по c значения (2.17) исследуем на экстремумы функцию $y(c) = c / \sigma^2(c)$ при $c > 0$. Ее производная имеет вид

$$y' = \frac{(1 + e^c)(e^{2c} - 4ce^c - 1)}{(e^c - 1)^3},$$

из уравнения $y' = 0 \Rightarrow e^{2c} - 4ce^c - 1 = 0$ численно находим стационарную точку $c \approx 2,17$. На интервале $c \in (0; 2,17)$ функция убывает ($y' < 0$), на интервале $c \in (2,17; +\infty)$ – возрастает ($y' > 0$), следовательно, $c \approx 2,17 \in [1,3; 3]$ – точка минимума. Для удобства расчетов положим

$$\bar{c} = 2,2; \sigma(\bar{c}) \approx 0,8; \frac{1}{\sigma(\bar{c})} \approx 1,25. \quad (2.18)$$

В принятой точке $y(2,2) \approx 3,43322$, что практически не отличается от минимального значения функции $y(2,17) \approx 3,43299$. Тогда, с учетом (2.18) оценки (2.2) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} 0,8 < |\sigma(kx)| < 1, 0 < \sigma'(kx) < 0,18k, |x| > \bar{c} / k, \bar{c} = 2,2; \\ \frac{0,8k|x|}{\bar{c}} = 0,36k|x| \leq |\sigma(kx)| \leq 0,8, 0,18k \leq \sigma'(kx) \leq \sigma'(0) = \frac{k}{2}, |x| \leq \bar{c} / k. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Замечание 2.2. Тот факт, что в элементарной возмущенной системе (2.9) с помощью сигмоидального управления можно обеспечить монотонный переходный процесс и при этом $|x(t)| \leq \bar{x} = \max\{|x(0)|, \Delta\}$, $t \geq 0$, позволяет расширить класс рассматриваемых элементарных систем за счет систем вида

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(t) + b(x,t)u, \quad (2.20)$$

где к функции $f_1(x)$ не предъявляется требование ограниченности при $x \in R$, допускается ее параметрическая неопределенность, но считается известным ее максимальное по модулю значение $|f_1(x)| \leq F_1 = \text{const} > 0$ при $x \in [0; \bar{x}]$; $f_2(t)$ – неизвестное ограниченное возмущение $|f_2(t)| \leq F_2 = \text{const} > 0$ при $t \geq 0$. Достаточное условие управляемости системы (2.20) в сделанных предположениях: $b(x,t)$ – знакопостоянная функция, т.е. $b(x,t) \neq 0$ при $x \in [0; \bar{x}]$, $t \geq 0$, допускается ее параметрическая неопределенность, но в

указанном интервале известны ее знак $\text{sign}(b(x,t)) = \text{const}$ и границы изменения $0 < b_{\min} \leq |b(x,t)| \leq b_{\max}$. Ко всем указанным функциям системы (2.20) не предъявляется требование гладкости, достаточно, чтобы они были кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва первого рода.

Обозначим $f(x,t) = f_1(x) + f_2(t)$, $|f(x,t)| \leq F = F_1 + F_2$. Тогда сигмоидальное управление

$$u = -\text{sign}(b) \cdot m\sigma(kx)$$

приводит к замкнутой системе

$$\dot{x} = f(x,t) - |b(x,t)|m\sigma(kx). \quad (2.21)$$

Зафиксируем большой коэффициент на основе (2.14) с учетом (2.18)

$$k \geq \bar{k} = \frac{\bar{c}}{\Delta} = \frac{2,2}{\Delta}. \quad (2.22)$$

При этом неравенства (2.11), (2.12) вне области $|x| \leq \Delta$ примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{V} = x(f - |b|m\sigma(kx)) &\leq |x|(F - b_{\min}m\sigma(\bar{c})) = |x|(F - 0,8b_{\min}m) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0,8b_{\min}m > F &\Rightarrow m > 1,25F / b_{\min}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Если $|x(0)| \leq \Delta$, то выполнение (2.22), (2.23) обеспечит $|x(t)| \leq \Delta$ при $t \geq 0$. В общем случае неравенство для выбора амплитуды (2.13), гарантирующее выполнение (2.10), имеет вид

$$m \geq \bar{m} = \frac{1}{b_{\min}\sigma(\bar{c})} \left(\frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right) = \frac{1,25}{b_{\min}} \left(\frac{|x(0)| - \Delta}{T} + F \right), \quad |x(0)| > \Delta. \quad (2.24)$$

Наличие двух параметров сигма-функции – гибкий инструмент настройки, позволяющий обеспечить заданную точность стабилизации и при неопределенности в описании производной переменной состояния, и при воздействии ограниченного возмущения, и при неопределенности множителя перед управляющим воздействием. Настройка параметров сигмоидального управления основана на неравенствах также как и при синтезе разрывного управления. Отличие состоит в том, что стандартно разрывные управления имеют постоянную амплитуду, которая выбирается из худшего расчетного

случая и не изменяется на всем протяжении процесса регулирования. Это часто приводит к избыточному расходу ресурсов управления в установившемся скользящем режиме, а для реализации переменной, неизбыточной амплитуды требуются специальные дополнительные алгоритмы и возможность соответствующей аппаратной реализации. В системах с сигмоидальными управлениями реализуется самонастройка управляющего сигнала в процессе регулирования без дополнительных алгоритмов, а изначально установленная постоянная амплитуда ограничивает диапазон его изменения.

Покажем, что в элементарной системе (2.9) с сигмоидальным управлением (2.5) можно обеспечить стабилизацию не только переменной состояния (2.10), но и ее производной, при этом управляющее воздействие воспроизведет внешнее неизвестное возмущение с заданной точностью.

Лемма 2.2. Если в системе (2.9), (2.5) внешнее возмущение и его производная ограничены известными константами $|f(t)| \leq F = \text{const} > 0$, $|\dot{f}(t)| \leq F_1 = \text{const} > 0$, $t \geq 0$, то тогда для любых сколь угодно малых $\Delta > 0$, $\Delta_1 > 0$, $T_1 > T > 0$ и любого начального значения $x(0)$ найдутся такие положительные действительные числа \bar{k} и \bar{m} , что при любых $k \geq \bar{k}$, $m \geq \bar{m}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \Delta, \quad t \geq T, \\ |\dot{x}(t)| &= |f(t) - m\sigma(kx(t))| \leq \Delta_1, \quad t \geq T_1 > T > 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Доказательство. Формализуем достаточные условия устойчивости системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t) - m\sigma(kx), \\ \ddot{x} &= \dot{f}(t) - 0,5mk(1 - \sigma^2(kx))\dot{x}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для этого введем кандидата на функцию Ляпунова $V = V_1 + V_2 = x^2 / 2 + \dot{x}^2 / 2$. В ходе доказательства леммы 2.1 было показано, что при выполнении условий (2.13)–(2.14) обеспечивается неравенство $\dot{V}_1 \leq |x|(F - m\sigma(c)) < 0$ и,

как следствие, $|x(t)| \leq \Delta$ за заданное время $T > 0$. Как было отмечено выше, если $|x(0)| \leq \Delta$, то $T = 0$. При $t \geq T$ в силу (2.2), (2.3) неравенство

$$\dot{V}_2 = \dot{x}\ddot{x} \leq |\dot{x}|(F_1 - 0,5mk(1 - \sigma^2(c))|\dot{x}|) < 0 \quad (2.27)$$

выполняется вне окрестности $|\dot{x}(t)| \leq \Delta_1$ без учета заданного времени сходимости, если

$$k > \max \left\{ \frac{c}{\Delta}, \frac{2F_1}{(1 - \sigma^2(c))m\Delta_1} \right\}. \quad (2.28)$$

Чтобы учесть заданное время $T_1 > T > 0$ сходимости производной из значения $|\dot{x}(T)| < F + m\sigma(c)$ в окрестность $|\dot{x}(t)| \leq \Delta_1$, из оценки решения второго уравнения системы (2.26) на интервале $[T; T_1]$

$$|\dot{x}(t)| \leq (F + m\sigma(c))e^{-0,5(1 - \sigma^2(c))mk(T_1 - T)} + \frac{2F_1}{(1 - \sigma^2(c))mk} \leq \Delta_1 \quad (2.29)$$

получим

$$k > \max \left\{ \frac{2F_1}{(1 - \sigma^2(c))m(\Delta_1 - \alpha)}, \frac{2}{(1 - \sigma^2(c))m(T_1 - T)} \ln \frac{F + m\sigma(c)}{\alpha} \right\}, \quad (2.30)$$

где $0 < \alpha < \Delta$.

Таким образом, при выполнении (2.13) и совместном выполнении условий (2.14), (2.30), а именно

$$k > \bar{k}(m),$$

$$\bar{k}(m) = \max \left\{ \frac{c}{\Delta}, \frac{2F_1}{(1 - \sigma^2(c))m(\Delta_1 - \alpha)}, \frac{2}{(1 - \sigma^2(c))m(T_1 - T)} \ln \frac{F + m\sigma(c)}{\alpha} \right\}, \quad (2.31)$$

обеспечивается (2.25) за любое заданное время $T_1 > T > 0$ при любом начальном значении $x(0)$. Отметим, что при фиксированном значении c (2.18) с учетом (2.19) условия (2.31) принимают вид:

$$k > \bar{k}(m) = \max \left\{ \frac{2,2}{\Delta}, \frac{5,56F_1}{m(\Delta_1 - \alpha)}, \frac{5,56}{m(T_1 - T)} \ln \frac{F + 0,8m}{\alpha} \right\}. \quad (2.32)$$

Лемма 2.2 доказана.

Следствие из леммы 2.2. Стабилизация производной с заданной точностью $|\dot{x}(t)| = |f(t) - m\sigma(kx(t))| \leq \Delta_1$ при $t \geq T_1$ позволяет получить оценку внешнего возмущения с помощью управляющего сигнала $u(t) = -f(t) \pm \Delta_1$, $t \geq T_1$. Данный подход будет использован в главах 3, 4, 5 для оценивания с заданной точностью неизвестных сигналов без использования их динамической модели при построении наблюдателей обобщенных скоростей с сигмоидальными корректирующими воздействиями.

Приведенные в данном разделе построения далее распространяются на неэлементарные управляемые системы, в которых число переменных состояния больше, чем число управлений.

2.2. Модель объекта управления. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается нелинейная одноканальная система, функционирующая при действии внешних несогласованных возмущений, математическая модель которой представима в треугольной (по составу аргументов функций ее подсистем) форме «вход–выход»:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) + b_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + b_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)u, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n) \in X \subset R^n$ – измеряемый вектор состояния с известными начальными условиями $x_i(0)$, $i = \overline{1, n}$, X – открытая ограниченная область изменения переменных состояния, определяемая физикой процесса; $x_1 \in X_1 \subset R$ – регулируемая переменная (выход), $u \in R$ – управляющее воздействие (вход); $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$ – функции от указанных переменных вектора состояния и внешних возмущений, которые полагаются неизвестными функциями времени, ограниченными по модулю известными константам:

$$|f_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)| \leq F_i = \text{const} > 0, t \geq 0, i = \overline{1, n}. \quad (2.34)$$

Система (2.33) является управляемой, а именно, $b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t) \neq 0, t \geq 0, i = \overline{1, n}$ [40]. Данные функции также могут содержать неопределенности, но при этом известными считаются их знаки $\text{sign}(b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)) = \text{const}, t \geq 0$ и диапазоны изменения

$$0 < b_{i, \min} \leq |b_i(x_1(t), \dots, x_i(t), t)| \leq b_{i, \max}, t \geq 0, i = \overline{1, n}. \quad (2.35)$$

В общем случае требование гладкости к функциям $f_i(t), b_i(t), i = \overline{1, n}$ системы (2.33) не предъявляется, достаточно, чтобы они были кусочно-непрерывными с конечным числом точек разрыва первого рода.

Обратим внимание, что модель (2.33) без ограничения общности можно рассматривать как одну из подсистем уравнений внешней динамики многоканальной системы [66, 141]. Под такое описание попадает представительный класс динамических объектов управления, например, теплообменные и электромеханические системы [11, 12, 14, 25, 31, 49, 74, 98, 103, 108, 109, 129, 138]. Модели ряда других объектов могут быть представлены в виде связного набора подсистем типа (2.33) с помощью невырожденных замен переменных без задействования в преобразованиях внешних возмущений.

Для объекта управления (2.33) ставится задача синтеза закона управления в форме обратной связи, обеспечивающего отслеживание выходной переменной $x_1(t)$ заданного, допустимого сигнала $g(t)$, который поступает в систему управления в реальном времени из внешнего источника, его аналитическое описание отсутствует, известны только его текущие значения и область изменения первой производной:

$$g(t) \in G \subseteq X_1, |\dot{g}(t)| \leq G_1, t \geq 0. \quad (2.36)$$

Возможен частный случай постоянного задающего воздействия $g(t) = \text{const}$, $t \geq 0$.

Как отмечалось выше, в сделанных предположениях и без ввода генераторов внешних воздействий задача слежения, а именно, стабилизация

ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$, может быть решена только с некоторой точностью. Пусть заданы точность стабилизации $\Delta_1 > 0$ и время $t_1 > 0$ ее достижения. Тогда цель управления – обеспечить в замкнутой системе

$$|e_1(t)| \leq \Delta_1, t \geq t_1 \quad (2.37)$$

и ограниченность остальных переменных.

В следующем разделе получены достаточные условия решения поставленной задачи (2.37) в рамках блочного подхода и декомпозиционного синтеза сигмоидальных обратных связей.

2.3. Блочный синтез системы управления с сигмоидальными локальными связями

Система (2.33) имеет структуру блочной формы управляемости [34, 40, 62]. Согласно идеологии блочного принципа управления, каждое уравнение системы (2.33) трактуется как элементарный блок, аналогичный (2.20), относительно фиктивного или истинного управления. В i -ом блоке ($i = \overline{1, n-1}$) в качестве фиктивного управления выступает переменная следующего блока x_{i+1} . Таким образом, неопределенности $f_i(x_1, \dots, x_i, t)$, $i = \overline{1, n-1}$, которые не согласованы с истинным управлением, находятся в пространстве соответствующих фиктивных управлений. Чтобы избежать сильного перерегулирования, характерного для линейных обратных связей с большими коэффициентами, которые стандартно используются для подавления неопределенностей [51, 62, 108, 135], стабилизирующие фиктивные управления предлагается выбрать в виде гладких и ограниченных сигма-функций:

$$\begin{aligned} x_i^* &= -\text{sign}(b_{i-1}) m_{i-1} \sigma(k_{i-1} e_{i-1}), \\ k_{i-1}, m_{i-1} &= \text{const} > 0, \quad i = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где e_1 – ошибка слежения, e_{i-1} ($i = \overline{3, n+1}$) – невязки между переменными x_i и выбранными фиктивными управлениями (2.38):

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - g, \\ e_i &= x_i - x_i^* = x_i + \text{sign}(b_{i-1})m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), i = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В замкнутой системе с помощью истинного управления, которое также для единообразия принимается в виде сигма-функции

$$\begin{aligned} u &= -\text{sign}(b_n)m_n\sigma(k_n e_n), \\ k_n, m_n &= \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

требуется обеспечить стабилизацию невязок (2.39), в том числе, ошибки слежения e_1 , что отвечает цели управления (2.37).

Перепишем замкнутую систему (2.33), (2.40) относительно невязок (2.39):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -|b_1|m_1\sigma(k_1 e_1) + f_1 - \dot{g} + b_1 e_2; \\ \dot{e}_i &= -|b_i|m_i\sigma(k_i e_i) + f_i + \Lambda_{i-1} + b_i e_{i+1}, i = \overline{2, n-1}; \\ \dot{e}_n &= -|b_n|m_n\sigma(k_n e_n) + f_n + \Lambda_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где слагаемые

$$\Lambda_i = \text{sign}(b_i)m_i \frac{k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} \dot{e}_i, i = \overline{1, n-1} \quad (2.42)$$

являются производными соответствующих фиктивных управлений (2.38), которые возникают при переходе к новому координатному базису (2.39).

Для настройки параметров сигмоидальных обратных связей в системе (2.41) используем блочный подход, в котором реализуется принцип декомпозиции [25, 74]. Задача сводится к последовательному решению элементарных задач синтеза в подсистемах (блоках), аналогичных (2.21). Отличие заключается в том, что только последняя, n -я подсистема регулируется непосредственно истинным управлением, а в остальных в качестве фиктивных управлений выступают переменные следующего блока. Как следствие, в общем случае ненулевых начальных значений невязок только в последнем блоке гарантируется монотонный переходный процесс. Формализуем достаточные условия стабилизации системы (2.41).

Теорема 2.1. Если в системе (2.41) выполняются условия (2.34)–(2.36), то тогда для любых начальных условий $x(0) \in X$ и любых, сколь угодно

малых $\Delta_1 > 0$, $t_1 > 0$ найдутся такие действительные числа $\bar{k}_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $0 < \bar{m}_i < \overline{\bar{m}}_i$, $i = \overline{1, n-1}$, $\bar{m}_n > 0$, что при любых $k_i \geq \bar{k}_i$, $m_i : \bar{m}_i < m_i \leq \overline{\bar{m}}_i$, $m_n \geq \bar{m}_n$ неравенство (2.37) выполнится.

Доказательство. Согласно идеологии блочного подхода, в замкнутой системе (2.41) нужно обеспечить следующую последовательность сходимости невязок:

$$\begin{aligned} |e_n(t)| \leq \Delta_n (t \geq t_n > 0) &\Rightarrow |e_{n-1}(t)| \leq \Delta_{n-1} (t \geq t_{n-1} > t_n) \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow |e_1(t)| \leq \Delta_1 (t \geq t_1 > t_2), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где $\Delta_1 > 0$, $t_1 > 0$ – заданы (2.37), $\Delta_i > 0, i = \overline{2, n}$ назначаются произвольно, зависимости t_i от начальных значений невязок и принятых $\Delta_i > 0$ устанавливаются в процессе доказательства.

Из леммы 2.1 следует существование $\bar{k}_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ таких, что для любых $k_i \geq \bar{k}_i$, $i = \overline{1, n}$ гарантируются желаемые радиусы $\Delta_i > 0, i = \overline{1, n}$ (2.43) окрестностей нуля, в которые невязки сойдутся в указанные моменты времени (2.43). С учетом (2.18), аналогично (2.22) зафиксируем значения больших коэффициентов k_i на основе неравенств:

$$k_i^* \geq \bar{k}_i = 2, 2 / \Delta_i, i = \overline{1, n}. \quad (2.44)$$

Чем больше принятые значения k_i^* , тем меньше будут реальные ошибки стабилизации невязок. Сходимость невязок в установленные области за указанное время (2.43) обеспечивается с помощью выбора $m_i, i = \overline{1, n}$.

Стабилизация системы (2.41) осуществляется «снизу вверх» (2.43). Достаточные условия для выбора амплитуд, аналогичные (2.23), справедливы при выполнении указанных условий:

$$\begin{aligned} 0, 8b_{1, \min} m_1 &> F_1 + G_1 + b_{1, \min} \Delta_2, |e_2| \leq \Delta_2; \\ 0, 8b_{i, \min} m_i &> F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i, \min} \Delta_{i+1}, |e_{i+1}| \leq \Delta_{i+1}, i = \overline{2, n-1}; \\ 0, 8b_{n, \min} m_n &> F_n + |\Lambda_{n-1}|. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Выполнение (2.44)–(2.45) обеспечивает последовательную стабилизацию невязок с заданной точностью без учета времени сходимости, которое зависит от начальных условий. В частном случае $|e_i(0)| \leq \Delta_i, i = \overline{1, n}$ выполнение (2.44)–(2.45) обеспечит $|e_i(t)| \leq \Delta_i, i = \overline{1, n}$ при $t \geq 0$, т.е. цель управления (2.37) достигается. Заметим, что если $|e_i(0)| \leq \Delta_i, i = \overline{n, j+1}$, $|e_j(0)| > \Delta_j$, то переходный процесс невязки $e_j(t)$ будет монотонным; в частности, при $j=1$ у ошибки слежения $e_1(t)$ переходный процесс будет без перерегулирования.

В общем случае $|e_i(0)| > \Delta_i, i = \overline{1, n}$ в рамках данных построений монотонный переходный процесс гарантируется только для $e_n(t)$. Пока переменные нижних блоков системы (2.41) не достигнут установленных окрестностей нуля (2.43), переменные верхних блоков растут по модулю и достигают максимального значения не позже, чем в следующие моменты времени:

$$|e_n(t)| \leq |e_n(0)| = e_{n,\max}, \quad |e_i(t)| \leq |e_i(t_{i+1})| = e_{i,\max}, \quad i = \overline{n-1, 1}, \quad t \geq 0. \quad (2.46)$$

В силу построений (2.39) начальное значение априори известно только для ошибки слежения, для остальных невязок мы располагаем только их оценками:

$$\begin{aligned} e_1(0) &= x_1(0) - g(0), \\ |e_i(0)| &\leq |x_i(0)| + m_{i-1} \sigma(k_{i-1} |e_{i-1}(0)|) \leq |x_i(0)| + m_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Принимая во внимание (2.41), (2.45), (2.47) и учитывая, что собственные движения в замкнутой системе (2.41) устойчивы, составим оценки максимальных значений (2.46):

$$\begin{aligned} e_{1,\max} &= |e_1(0)| + b_{1,\max} (e_{2,\max} - \Delta_2) t_2; \\ e_{i,\max} &= |x_i(0)| + m_{i-1} + b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}) t_{i+1}, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ e_{n,\max} &= |x_n(0)| + m_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Для обеспечения заданного времени сходимости требуется увеличить нижние границы для выбора амплитуд (2.45). Предварительно дадим оценки производных фиктивных управлений (2.42). Они отличаются на разных интервалах и зависят от соответствующих оценок производных сигма-функций и производных соответствующих невязок (2.41). Для производных невязок $e_i(t), i = \overline{1, n-1}$ с учетом (2.45) справедливы оценки:

$$\begin{aligned}
t \in [0; t_2) : |\dot{e}_1(t)| &\leq \underbrace{F_1 + G_1 + b_{1,\max} \Delta_2}_{< 0,8b_{1,\min} m_1} + b_{1,\max} (e_{2,\max} - \Delta_2) + b_{1,\max} m_1 < \\
&< 2b_{1,\max} m_1 + b_{1,\max} (e_{2,\max} - \Delta_2), \\
t \geq t_2 : |\dot{e}_1(t)| &\leq F_1 + G_1 + b_{1,\max} \Delta_2 + b_{1,\max} m_1 < 2b_{1,\max} m_1; \\
t \in [0; t_{i+1}) : |\dot{e}_i(t)| &= \underbrace{F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i,\max} \Delta_{i+1}}_{< 0,8b_{i,\min} m_i} + b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}) + b_{i,\max} m_i < \\
&< 2b_{i,\max} m_i + b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_i), \\
t \geq t_{i+1} : |\dot{e}_i(t)| &= F_i + |\Lambda_{i-1}| + b_{i,\max} \Delta_{i+1} + b_{i,\max} m_i < 2b_{i,\max} m_i, i = \overline{2, n-1}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Для производной сигма-функции в силу (2.19) на указанных интервалах имеем:

$$\begin{aligned}
|e_i(t)| > \bar{c} / k_i, t \in [0; t_i) : 0 < 0,5k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i)) < 0,18k_i, \\
|e_i(t)| \leq \bar{c} / k_i, t \geq t_i : 0,18k_i \leq 0,5k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i)) \leq 0,5k_i, i = \overline{1, n-1}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Объединяя (2.49)–(2.50), получим оценки производных фиктивных управлений (2.42) на указанных интервалах:

$$|\Lambda_i| = m_i \frac{k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} |\dot{e}_i| \leq \begin{cases} 0,36k_i m_i^2 b_{i,\max} + 0,18k_i m_i b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}), t \in [0; t_{i+1}); \\ 0,36k_i m_i^2 b_{i,\max}, t \in [t_{i+1}; t_i); \\ k_i m_i^2 b_{i,\max}, t \geq t_i; i = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Для того чтобы единообразно принять в качестве оценки

$$|\Lambda_i| \leq k_i m_i^2 b_{i,\max}, t \geq 0; i = \overline{1, n-1}, \tag{2.51}$$

нужно обеспечить

$$0,18k_i m_i b_{i,\max} (e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}) \leq 0,64k_i m_i^2 b_{i,\max} \Rightarrow e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1} \leq 3,5m_i, i = \overline{1, n-1}.$$

С этой целью введем ограничения на пиковые значений невязок, несколько снизив предельные оценки для удобства расчетов:

$$e_{i,\max} \leq 3m_{i-1} + \Delta_i, \quad i = \overline{2, n}. \quad (2.52)$$

Для единообразия введем ограничение для перерегулирования по ошибке слежения:

$$|e_1(0)| < e_{1,\max} \leq E_1. \quad (2.53)$$

В частном случае $|e_1(0)| < \Delta_1$ выполнение $e_{1,\max} \leq E_1 = \Delta_1$ обеспечит $|e_1(t)| \leq \Delta_1, t \geq 0$.

С учетом (2.52)–(2.53) неравенства (2.48) примут вид

$$\begin{aligned} e_{1,\max} &= |e_1(0)| + 3b_{1,\max} m_1 t_2 \leq E_1; \\ e_{i,\max} &= |x_i(0)| + m_{i-1} + 3b_{i,\max} m_i t_{i+1} \leq 3m_{i-1} + \Delta_i, \quad i = \overline{2, n-1}; \\ e_{n,\max} &= |x_n(0)| + m_{n-1} \leq 3m_{n-1} + \Delta_n, \end{aligned} \quad (2.54)$$

откуда следуют дополнительные условия, которые надо учитывать при выборе $t_i, i = \overline{n, 2}$ ($0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_2 < t_1$) и амплитуд фиктивных управлений:

$$0 < m_1 \leq \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max} t_2}, \quad 0 < m_i \leq \frac{2m_{i-1} + \Delta_i - |x_i(0)|}{3b_{i,\max} t_{i+1}}, \quad i = \overline{2, n-1}; \quad (2.55)$$

$$m_i > \frac{|x_{i+1}(0)| - \Delta_{i+1}}{2}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.56)$$

Заметим, что по построениям (2.45) $m_{i-1} > \Delta_i, i = \overline{2, n}$, при этом $\Delta_i > 0$ могут быть приняты как меньше, так и больше величин $|x_i(0)|$, требования малости к ним не предъявляются. Для упрощения расчетов можно изначально зафиксировать $\Delta_i = |x_i(0)|, i = \overline{2, n}$, что снимает необходимость проверки выполнения условий (2.56).

В общем случае $\Delta_i < |x_i(0)|, i = \overline{2, n}$ неравенства нижней границы выбора амплитуд $m_i, i = \overline{1, n-1}$ будут содержать две базовые компоненты. С помощью первой компоненты m_{i1} , а также m_n , аналогично (2.24) обеспечивается сходимость невязок $e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)$ на интервалах $[t_2; t_1]$,

$[t_3; t_2], \dots, [0; t_n]$ соответственно из пиковых значений (2.48), (2.54) в заданные области (2.43) за заданное время (2.37); а с помощью второй m_{i_2} – ограничения (2.56). При этом в отличие от амплитуды истинного управления m_n , которая выбирается только на основе нижней оценки, для выбора амплитуд фиктивных управлений имеются ограничения сверху (2.55).

Формализуем пошаговую процедуру последовательного, «сверху вниз» выбора амплитуд сигмоидальных управлений и допустимых моментов времени $t_i, i = \overline{2, n}$ при заданных Δ_1, t_1 , назначенных E_1 (2.53), $\Delta_i > 0, i = \overline{2, n}$ и принятых на их основе $k_i^*, i = \overline{1, n}$ (2.44). В процессе процедуры допускается варьирование свободных параметров.

Шаг 1. С учетом (2.54) первое неравенство (2.45) примет вид:

$$\begin{aligned} 0,8b_{1,\min} m_1 &\geq \frac{|e_1(0)| + 3b_{1,\max} m_1 t_2 - \Delta_1}{t_1 - t_2} + F_1 + G_1 + b_{1,\min} \Delta_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_{11} &\geq \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min} \Delta_2)(t_1 - t_2)}{0,8b_{1,\min} t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max}) t_2}, \end{aligned}$$

откуда следует ограничение на выбор $0 < t_2 < t_1$:

$$0,8b_{1,\min} t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max}) t_2 > 0 \Rightarrow t_2 < 0,2 \frac{b_{1,\min}}{b_{1,\max}} t_1. \quad (2.57)$$

Выбираем $t_2^* > 0$ на основе (2.57) и подставляем его в двойное неравенство

$$\max\{m_{11}; m_{12}\} < \bar{m}_1 < \bar{\bar{m}}_1, \quad (2.58)$$

где

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min} \Delta_2)(t_1 - t_2^*)}{0,8b_{1,\min} t_1 - (0,8b_{1,\min} + 3b_{1,\max}) t_2^*}, m_{12} = \frac{|x_2(0)| - \Delta_2}{2}, \\ \bar{\bar{m}}_1 &= \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max} t_2^*}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Если (2.58) выполняется, то тогда фиксируем t_2^* , $m_1^* \in (\bar{m}_1; \bar{\bar{m}}_1]$ и переходим на второй шаг. При невыполнении (2.45) следует варьировать произвольные параметры. Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Если требуется обеспечить принятое E_1 (2.53), то тогда варьировем Δ_2 и/или t_2 . Если при изначально принятом $0 < t_2^* < 0,2b_{1,\min}t_1 / b_{1,\max}$ имеет место $m_{12} > m_{11}$ (2.59), то путем увеличения Δ_2 (вплоть до $\Delta_2 = |x_2(0)|$) нужно обеспечить $m_{11} > m_{12}$. Если при новом Δ_2^* неравенство (2.58) не выполняется или изначально $m_{11} > m_{12}$, то тогда снижаем t_2^* . Критическое значение $\bar{t}_2 > 0$: $m_{11}(\bar{t}_2) = \bar{\bar{m}}_1(\bar{t}_2)$ существует и равно

$$\bar{t}_2 = \frac{\sqrt{p_{12}^2 - 4p_{11}p_{13} - p_{12}}}{2p_{11}},$$

где

$$\begin{aligned} p_{11} &= -3b_{1,\max}(F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2), \\ p_{12} &= 0,8b_{1,\min}(E_1 - |e_1(0)|) + 3b_{1,\max}(E_1 - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)t_1), \\ p_{13} &= -0,8b_{1,\min}(E_1 - |e_1(0)|)t_1. \end{aligned}$$

Из предельного соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow +0} m_{11}(t_2) &= \frac{|e_1(0)| - \Delta_1 + (F_1 + G_1 + b_{1,\min}\Delta_2)t_1}{0,8b_{1,\min}t_1} = \text{const} < \\ &< \lim_{t_2 \rightarrow +0} \frac{E_1 - |e_1(0)|}{3b_{1,\max}t_2} = +\infty, \end{aligned} \quad (2.60)$$

следует, что $\bar{\bar{m}}_1$ можно сделать сколь угодно большим и при любом $t_2^* > 0$: $0 < t_2^* < \bar{t}_2$ неравенство (2.58) будет выполнено.

Таким образом, путем снижения t_2 можно обеспечить любое, достаточно малое перерегулирование по ошибке слежения (2.53). Однако это может привести к существенному росту нижних границ для выбора амплитуд в следующих блоках.

Второй способ. Если отказаться от принятого E_1 (2.53) и увеличить его значение:

$$E_1 > \bar{E} = |e_1(0)| + 3b_{1,\max} m_1^* t_2^*,$$

где \bar{E} – минимально возможное перерегулирование ошибки слежения при изначально принятом $0 < t_2^* < 0,2b_{1,\min} t_1 / b_{1,\max}$, то тогда можно произвольно увеличить верхнюю границу \bar{m}_1 для выбора амплитуды (2.58).

Допустимые значения t_2^* , m_1^* , Δ_2^* и $k_2^*(\Delta_2^*)$ фиксируются, переходим на второй шаг.

Шаг i ($i = 2, n-1$). Соответствующее номеру шага неравенство (2.43), а именно $|e_i(t)| \leq \Delta_i$ ($t \geq t_i > t_{i+1}$), обеспечивается путем выбора m_i . С учетом (2.51), (2.54) i -е неравенство (2.45) примет вид:

$$\begin{aligned} 0,8b_{i,\min} m_i &\geq \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* + 3b_{i,\max} m_i t_{i+1} - \Delta_i^*}{t_i^* - t_{i+1}} + \\ &+ F_i + k_{i-1}^* (m_{i-1}^*)^2 b_{i-1,\max} + b_{i,\min} \Delta_{i+1} \Rightarrow \\ m_{i1} &\geq \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* - \Delta_i^* + (F_i + k_{i-1}^* (m_{i-1}^*)^2 b_{i-1,\max} + b_{i,\min} \Delta_{i+1})(t_i^* - t_{i+1})}{0,8b_{i,\min} t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max}) t_{i+1}}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

откуда следует ограничение на выбор $0 < t_{i+1} < t_i^*$, аналогичное (2.57):

$$0,8b_{i,\min} t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max}) t_{i+1} > 0 \Rightarrow t_{i+1} < 0,2 \frac{b_{i,\min}}{b_{i,\max}} t_i^*. \quad (2.62)$$

Выбираем $t_{i+1}^* > 0$ на основе (2.62) и подставляем его в двойное неравенство

$$\max\{m_{i1}; m_{i2}\} < \bar{m}_i < \bar{\bar{m}}_i, \quad (2.63)$$

где $m_{i1}(t_{i+1}^*)$ (2.61),

$$m_{i2} = \frac{|x_{i+1}(0)| - \Delta_{i+1}}{2}, \quad \bar{\bar{m}}_i = \frac{2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|}{3b_{i,\max} t_{i+1}^*}.$$

Если (2.63) выполняется, то тогда фиксируем t_{i+1}^* , $m_i^* \in (\bar{m}_i; \bar{\bar{m}}_i]$ и переходим на следующий шаг. При невыполнении (2.63) следует варьировать

произвольные параметры Δ_{i+1} и/или t_{i+1} . Если изначально $m_{i2} > m_{i1}$, то путем увеличения Δ_{i+1} (вплоть до $\Delta_{i+1} = |x_{i+1}(0)|$) нужно обеспечить $m_{i1} > m_{i2}$. Если при новом Δ_{i+1}^* неравенство (2.63) не выполняется или изначально $m_{i1} > m_{i2}$, то тогда снижаем t_{i+1}^* . Критическое значение $\bar{t}_{i+1} > 0: m_{i1}(\bar{t}_{i+1}) = \bar{m}_i(\bar{t}_{i+1})$ существует и равно

$$\bar{t}_{i+1} = \frac{\sqrt{p_{i2}^2 - 4p_{i1}p_{i3}} - p_{i2}}{2p_{i1}},$$

где

$$\begin{aligned} p_{i1} &= -3b_{i,\max}(F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2 b_{i-1,\max} + b_{i,\min} \Delta_{i+1}), \\ p_{i2} &= 3b_{i,\max}(3m_{i-1}^* + (F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2 b_{i-1,\max} + b_{i,\min} \Delta_{i+1})t_i^*) + \\ &+ 0,8b_{i,\min}(2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|), \\ p_{i3} &= -0,8b_{i,\min}(2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|)t_i^*, i = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

Из предельного соотношения, аналогичного (2.60), а именно

$$\begin{aligned} \lim_{t_{i+1} \rightarrow +0} m_{i1}(t_{i+1}) &= \frac{|x_i(0)| + m_{i-1}^* - \Delta_i^* + (F_i + k_{i-1}^*(m_{i-1}^*)^2 b_{i-1,\max} + b_{i,\min} \Delta_{i+1})t_i^*}{0,8b_{i,\min}t_i^*} = \\ &= \text{const} < \lim_{t_{i+1} \rightarrow +0} \frac{2m_{i-1}^* + \Delta_i^* - |x_i(0)|}{3b_{i,\max}t_{i+1}} = +\infty, \end{aligned}$$

следует, что при любом $t_{i+1}^* > 0: 0 < t_{i+1}^* < \bar{t}_{i+1}$ неравенство (2.45) будет выполнено.

Заметим, что на i -м шаге (в отличие от первого) обеспечить выполнение (2.63) можно только указанным способом. Увеличение верхней границы \bar{m}_i путем увеличения m_{i-1}^* приведет также к росту нижней границы $\bar{m}_i(m_{i1})$, причем более быстрыми темпами.

Допустимые значения t_{i+1}^* , m_i^* , Δ_{i+1}^* и $k_{i+1}^*(\Delta_{i+1}^*)$ фиксируются, переходим на следующий шаг.

Шаг n (последний). С учетом (2.51), (2.54) третье неравенство (2.45) примет вид, аналогичный (2.24):

$$m_n \geq \bar{m}_n = \frac{1,25}{b_{n,\min}} \left(\frac{|x_n(0)| + m_{n-1}^* - \Delta_n^*}{t_n^*} + F_n + k_{n-1}^* (m_{n-1}^*)^2 b_{n-1,\max} \right). \quad (2.64)$$

На основе (2.64) фиксируем m_n^* . Процедура настройки амплитуд закончена.

Таким образом, существуют такие $\bar{k}_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ (2.44), $0 < \bar{m}_i < \bar{\bar{m}}_i$, $i = \overline{1, n-1}$ (2.58)–(2.59), (2.63) и $\bar{m}_n > 0$ (2.64), что для любых $k_i \geq \bar{k}_i$, $m_i : \bar{m}_i < m_i \leq \bar{\bar{m}}_i$, $\forall m_n \geq \bar{m}_n$ в замкнутой системе (2.41) переменные последовательно сходятся в указанные области за указанное время (2.43), что и обеспечивает цель управления (2.37). Теорема доказана.

Для упрощения вычислительной реализации в качестве истинного управления вместо (2.40) можно также использовать всюду ограниченную, но негладкую sat-функцию [28, 35, 53].

Замечание 2.3. Для управления механическими системами часто используют электрические безынерционные исполнительные устройства, построенные на базе силовых электронных элементов, которые могут функционировать исключительно в ключевом режиме. В этом случае вместе с сигмоидальными локальными связями (2.39) естественно вместо непрерывного управления (2.40) использовать закон разрывного управления:

$$u = -\text{sign}(b_n) m_n \text{sign}(e_n). \quad (2.65)$$

Разрывное управление (2.65) имеет один настраиваемый параметр – амплитуду, которая выбирается на основе неравенства, аналогичного (2.64), а именно:

$$m_n \geq \bar{m}_n = \frac{1}{b_{n,\min}} \left(\frac{|x_n(0)| + m_{n-1}^*}{t_n^*} + F_n + k_{n-1}^* (m_{n-1}^*)^2 b_{n-1,\max} \right). \quad (2.66)$$

При выполнении (2.66) в замкнутой системе (2.33), (2.39), (2.65) за конечное время $0 < t_n^* < 0,2b_{n-1,\min} t_{n-1}^* / b_{n-1,\max} < t_1$ возникнет скользящий режим [24, 64, 95, 114, 128]. В теории – на поверхности $e_n = 0$ в виртуальном пространстве невязок $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in R^n$, а в реальности из-за различного рода

неидеальностей движение изображающей точки происходит в пограничном слое поверхности переключения $|e_n(t)| \leq \Delta_n, t \geq t_n^*$, ширина которого пропорциональна амплитуде разрывного управления. При этом неравенства (2.43), а, следовательно, и цель управления (2.37), обеспечиваются.

Необходимо отметить, что параметры обратной связи в предложенной процедуре определяются на основе неравенств, составленных для худшего расчетного случая, что не требует перенастройки регулятора при изменении внутренних и внешних факторов в допустимых пределах. Кроме того, показана принципиальная возможность в рамках предложенного подхода обеспечить любую, сколь угодно малую ошибку слежения с любым, достаточно малым перерегулированием (2.53) за любое, сколь угодно малое время при любых начальных условиях. Но эти построения имеют больше теоретическую значимость, поскольку уменьшение показателей цели управления (2.37), (2.53) обернется ростом параметров регулятора. Это может привести к избыточным величинам фиктивных и истинных управлений в переходном процессе, недопустимым в реальных системах автоматического управления.

Замечание 2.4. При использовании разработанной в доказательстве теоремы процедуры настройки в практических приложениях рекомендуется фиксировать коэффициенты обратной связи как можно ближе к нижним базовым границам. Учитывая консервативность полученных оценок можно несколько завышать целевые показатели (2.37) при выполнении расчетов, так как реально в установившемся режиме будет достигаться меньшая ошибка слежения (2.15) и/или меньшее время регулирования (см. раздел 2.4).

Обратим внимание, что в силу организации локальных обратных связей (2.38) в замкнутой системе (2.33), (2.65) переменные состояния $x_i(t)$, $i = \overline{2, n}$ будут «отслеживать» ограниченные сигмоидальные сигналы, при этом максимальные отклонения фиктивных управлений от «задающих воздействий» ограничены (2.48), а точность слежения будет зависеть от

задаваемой точности стабилизации невязок (2.39) («ошибок слежения»). Данный факт является предпосылкой для учета ограничений на переменные состояния. При наличии ограничения на управление $|u(t)| \leq U$, $U = \text{const} > 0$, $t \geq 0$, для его выполнения достаточно принять $m_n \leq U$ в силу ограниченности сигма-функции своей амплитудой.

2.4. Результаты моделирования

Для иллюстрации разработанного метода рассмотрим задачу синтеза следящей системы для перевернутого математического маятника, модель которого с учетом редуцированной динамики двигателя постоянного тока (ДПТ) аналогична (2.33) и имеет третий порядок [127]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21} \sin x_1 - a_{22} x_2 + b_2 x_3 + \eta(t), \\ \dot{x}_3 &= -a_{32} x_2 - a_{33} x_3 + b_3 u, \end{aligned} \quad (2.67)$$

где a_{ij} , b_i – положительные конструктивные коэффициенты

$$a_{21} = \tilde{g} / l, a_{22} = \kappa / l, b_2 = k_a / (\tilde{m} l^2), a_{32} = c / L, a_{33} = R / L, b_3 = 1 / L, \quad (2.68)$$

которые не определены и могут изменяться в известных диапазонах. Описание переменных состояния $x = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$ системы (2.67), которые подлежат прямым измерениям, и параметров (2.68) приведено в табл. 2.1.

В системе (2.67) регулируемой (выходной) переменной является угловое положение маятника $x_1(t)$, для которого ставилась задача отслеживания заданного сигнала $g(t)$ (2.36). Для обеспечения (2.37) применялся разработанный метод с формированием сигмоидальных локальных связей и синтеза разрывного управления, аналогично (2.38), (2.65) соответственно, где $n = 3$, u – напряжение питания якорной цепи ДПТ, [В].

В табл. 2.2 приведены рассматриваемые диапазоны изменения внешних воздействий, параметров объекта, а также конкретные функции и значения, принятые при моделировании.

Таблица 2.1. Описание переменных состояния и параметров объекта управления

Обозначение	Описание, единица измерения	Обозначение	Описание, единица измерения
$x_1(t)$	угловое положение маятника, $(-\pi; \pi)$ [рад]	l	длина маятника, [м]
$x_2(t)$	угловая скорость маятника, $[-2; 2]$ [рад/с]	κ	коэффициент вязкого трения, $[\text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2]$
$x_3(t)$	ток якоря ДПТ, $[-4; 4]$ [А]	c	коэффициент противо-ЭДС ДПТ, $[\text{В} \cdot \text{с} / \text{рад}]$
$\eta(t)$	неконтролируемое возмущение, $[\text{Н} \cdot \text{м}]$	R	сопротивление якоря ДПТ, [Ом]
$\tilde{g} = 9,81$	ускорение свободного падения, $[\text{м} / \text{с}^2]$	L	индуктивность якоря ДПТ, [Гн]
\tilde{m}	масса маятника, [кг]	k_a	коэффициент пропорциональности, $[\text{Н} \cdot \text{м} / \text{А}]$

По данным таблицы 2.2 были рассчитаны допустимые диапазоны для коэффициентов (2.68): $a_{21} \in [32,70; 49,05]$, $a_{22} \in [6,67; 20]$, $b_2 \in [74,67; 243,06]$, $a_{32} \in [20,76; 27,5]$, $a_{33} \in [319,23; 350]$, $b_3 \in [76,92; 83,34]$. На их основе, а также с учетом заданных (завышенных, см. замечание 2.4) показателей (2.37)

$$\Delta_1 = 0,1 \text{ [рад]}, t_1 = 5 \text{ [с]} \quad (2.69)$$

и принятых $E_1 = 2,05$ (2.53), $\Delta_2 = 0,64$, $\Delta_3 = 0,05$ (2.43) для худшего расчетного случая на основе неравенств (2.44), (2.58), (2.63), (2.64) были выбраны следующие коэффициенты обратной связи:

$$m_1 = 1,96, k_1 = 22; m_2 = 3,54, k_2 = 3,44; m_3 = 190. \quad (2.70)$$

Таблица 2.2. Параметры объекта управления, принятые при моделировании

	Диапазон изменения	Вид или значение			
		Эксперимент 1	Эксперимент 2	Эксперимент 3	Эксперимент 4
$\eta(t)$	$[-0,5;0,5]$	$0,25t, t \in [(k-1)T, kT),$ $k = 1, 2, \dots, T = 2$		$0,5 \cos t$	$0,3 \sin t$
$g(t)$	$[-0,5;0,5]$ $ \dot{g}(t) \leq 0,5$	$0,2 \sin t$		$0,5 \sin t $	$0,25 \sin 2t$
\tilde{m}	$[0,18;0,25]$	0,18	0,25	$0,07 \cos(t/2) + 0,18$	
l	$[0,2;0,3]$	0,2	0,3	0,25	0,23
κ	$[2;4]$	2	4	3	3,8
c	$[0,27;0,33]$	0,27	0,33	0,3	0,28
R	$[4,15;4,2]$	4,15	4,2	4,18	4,1
L	$[0,012;0,013]$	0,012	0,013	0,013	0,012
k_a	$[1,68;1,75]$	1,68	1,75	1,7	1,69

Моделирование проводилось в среде MATLAB-Simulink, для численного интегрирования системы (2.67) использовался метод Эйлера с постоянным шагом $5 \cdot 10^{-6}$. Как показано в табл. 2.2, в экспериментах задавались негладкие и гладкие внешние возмущения и задающие воздействия, масса маятника была постоянной (в первом) и переменной (во втором), параметры приняты в виде промежуточных значений из допустимых диапазонов. Все эксперименты проводились при одинаковых коэффициентах обратной связи (2.70) и одинаковых начальных условиях $x_1(0) = \pi / 3$, $x_2(0) = 0,64$, $x_3(0) = 0,5$.

На рис. 2.4 для эксперимента 1 представлены графики задающего воздействия $g(t)$ и регулируемой переменной $x_1(t)$, ее поведение во втором эксперименте практически не отличается от показанного на рис. 2.4. На рис. 2.5 представлен график ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ [рад] для эксперимента 2. На рис. 2.6–2.7 для экспериментов 3 и 4 приведены графики

задающего воздействия $g(t)$ и регулируемой переменной $x_1(t)$ (снизу), а также ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ [рад] (сверху).

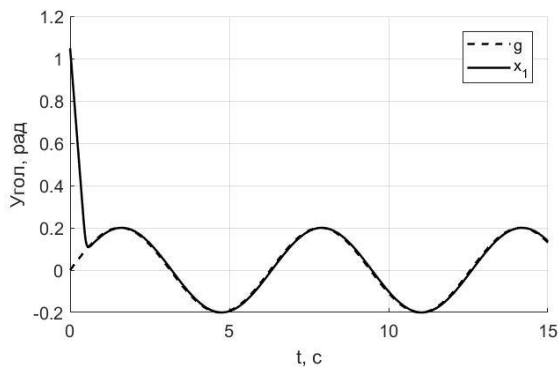


Рис. 2.4. Графики $g(t)$, $x_1(t)$
(эксперимент 1)

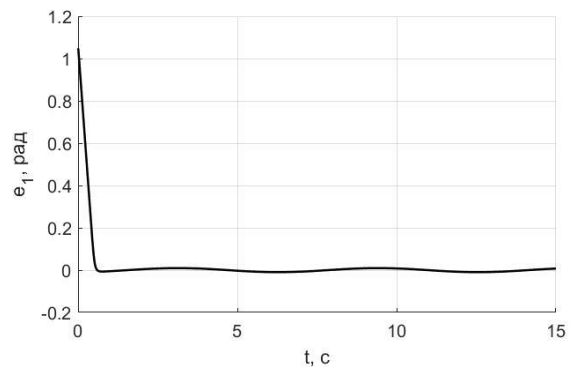


Рис. 2.5. Графики $e_1(t)$
(эксперимент 2)

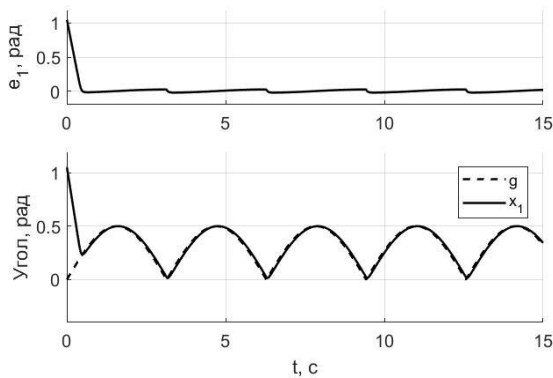


Рис. 2.6. Графики $g(t)$, $x_1(t)$,
 $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$
(эксперимент 3)

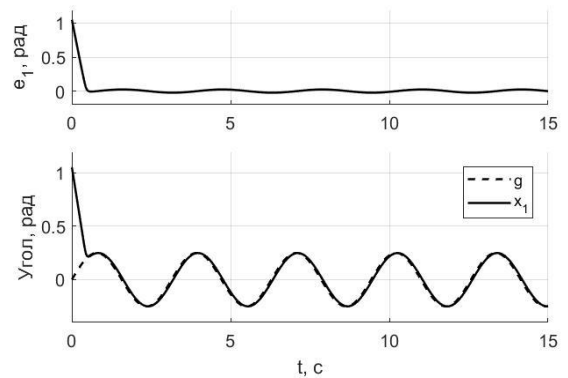


Рис. 2.7. Графики $g(t)$, $x_1(t)$,
 $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$
(эксперимент 4)

В табл. 2.3 для экспериментов представлены показатели качества регулирования ошибки слежения $e_1(t)$: время регулирования t_* : $|e_1(t)| \leq 0,1$, $t \geq t_*$; величина перерегулирования $e_{1,\max} \geq |e_1(t)|$, $t \geq 0$; точность $\delta_1 \geq |e_1(t)|$, достигаемая при $t \geq 5$ [с].

Таблица 2.3. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Требования (не более)	Эксперимент 1	Эксперимент 2	Эксперимент 3	Эксперимент 4
t_* , с	5	0,4532	0,4714	0,4067	0,4138
$e_{1,\max}$, рад	2,05	1,0474	1,0477	1,0473	1,0472
δ_1 , рад	0,1	0,0093	0,0096	0,0242	0,0240

Таким образом, из рис. 2.4-2.7 и табл. 2.3 следует, что цель управления (2.37), (2.69) достигается для всех экспериментов, все показатели не превышают заданных значений. Следует отметить, что в силу выбора параметров регулятора из достаточных условий, радиусы областей сходимости ошибок слежения в установившемся режиме оказались примерно в 4–10 раз меньше заданного, а время регулирования – в 10–12 раз меньше заданного (2.69).

Конечно, высокоточные системы слежения потребуют индивидуальной настройки каждого рабочего режима в условиях полной определенности параметров объекта управления и внешних воздействий. Для системы (2.67), функционирующей в условиях неопределенности, можно обеспечить лучшие, чем указанные в табл. 2.3, показатели регулирования путем увеличения коэффициентов обратной связи (2.70). Предельные достижимые значения зависят от ограничений на переменные состояния и управления конкретного объекта управления.

2.5. Выводы к главе 2

В данной главе формализованы особенности сигма-функции и сигмоидальных обратных связей в задачах инвариантности. Для нелинейного одноканального объекта, функционирующего в условиях действия внешних несогласованных возмущений, разработана декомпозиционная процедура синтеза следящей системы с сигмоидальными локальными связями, обеспечивающая заданные точность и время регулирования. Научная новизна заключается во введении новых типов нелинейных локальных связей. Использование сигма-функции (как допредельной реализации функции знака) позволило синтезировать реализуемый закон управления и обеспечить ε -инвариантность регулируемой переменной по отношению к несогласованным возмущениям и неопределенностям без предположения об их гладкости. При этом по сравнению с разрывной обратной связью сигмоидальная обеспечивает лучшее качество сигналов замкнутых систем

(гладкость), а по сравнению с глубокой обратной связью – меньшую величину перерегулирования переменных состояния в силу своей ограниченности.

Настройка параметров обратных связей выполняется на основе неравенств, для составления которых достаточно знать диапазоны изменения неизвестных параметров и внешних воздействий.

Представлены результаты численного моделирования разработанной декомпозиционной процедуры для системы управления перевернутым маятником. Данные результаты подтверждают эффективность разработанных алгоритмов: заданные точность и время регулирования достигаются при различных допустимых параметрах системы, внешних возмущениях и задающих воздействиях без перенастройки коэффициентов регулятора.

Полученные теоретические результаты будут применены в следующих главах для решения задач управления различными мехатронными объектами с учетом их особенностей.

Глава 3. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности

В данной главе в качестве объекта управления рассматривается электромеханическая система, которая включает динамическую модель манипулятора, функционирующего в условиях неопределенности и неполных измерений (механическая подсистема), и редуцированную модель электрических исполнительных устройств (ИУ). В разделе 3.1 формализована постановка задачи слежения за траекториями, заданными в системе координат рабочего органа манипулятора. В разделе 3.2 на основе блочного подхода представлено решение задачи слежения в механической подсистеме, где фиктивными управлениями полагаются обобщенные скорости и обобщенные моменты. В разделе 3.3 разработана иерархическая процедура синтеза сигмоидальных обобщенных моментов, обеспечивающих заданную точность слежения в условиях неопределенности матрицы перед фиктивным управлением. В разделе 3.4 с помощью наблюдателя пониженного порядка с сигмоидальными корректирующими воздействиями решена задача оценивания неизмеряемых переменных. В разделе 3.5 решена задача слежения за сформированными сигмоидальными обобщенными моментами в электрической подсистеме. В разделе 3.6 представлены результаты моделирования разработанного подхода применительно к трехзвенному манипулятору типа UMS-2. Результаты данной главы опубликованы в [31].

3.1. Модель объекта управления. Постановка задачи

Рассматривается математическая модель электромеханического объекта управления (1.27)–(1.28) с n степенями свободы, которую приведем еще раз для удобства изложения [37]:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= I^{-1}(q_1)[v - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta(t)], \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{v} = -Av - Dq_2 + Bu. \quad (3.2)$$

Механическая подсистема (3.1) описывает динамику робота-манипулятора, в котором звенья образуют кинематические пары 5-го класса и являются абсолютно жесткими. В электрической подсистеме (3.2), которая описывает учитываемую динамику ДПТ, компоненты вектора $v = \text{col}(v_1, \dots, v_n)$ непрерывны и ограничены вместе со своими производными:

$$|v_i(t)| \leq \bar{v}_{0i} = \text{const}, \quad |\dot{v}_i(t)| \leq \bar{v}_{1i} = \text{const}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

Напряжение питания якорной цепи электроприводов $u \in R^n$ полагаются разрывными управляющими воздействиями с ограниченной амплитудой $|u_i| \leq k_{3i}, \quad i = \overline{1, n}$.

Многозвенная конструкция манипулятора заканчивается сменным рабочим органом или схватом, удерживающим груз. Координаты вектора пространственной ориентации схвата $y_1 \in Y_1 \subset R^m$, где $m = 1 \div 6 \leq n$, однозначно выражаются через обобщенные координаты, $y_1 = h(q_1(t))$ – известная вектор-функция, ее элементы и их производные ограничены:

$$|y_{1i}^{(j)}(t)| \leq Y_{ji} = \text{const} > 0, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, 3}. \quad (3.4)$$

Здесь и далее во вводимых неравенствах оценочные значения считаются известными из предметной области – конструктивных ограничений и соображений безопасности.

В данной главе рассматриваются манипуляторы с неизбыточным числом степеней свободы $m = n$ в предположении, что матрица частных производных $J(q_1)_{n \times n} = (\partial h / \partial q_1)$ всюду, за исключением конечного числа особых точек, имеет полный ранг: $\text{rank} J_{n \times n}(q_1) = n, \quad q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1$. Ставится задача слежения для выходных переменных $y_1 = h(q_1) \in R^n$ электромеханической системы (3.1)–(3.2) за допустимыми траекториями

$g(t) \in R^n$, заданными в системе координат рабочего пространства схвата $g \in Y_1$, в следующих предположениях:

1) аналитический вид задающих воздействий не известен, имеются только их текущие значения, сигналы $g = \text{col}(g_1, \dots, g_n)$ полагаются ограниченными функциями времени с ограниченными производными:

$$|g_i^{(j)}(t)| \leq Y_{ji}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, 3};$$

2) прямым измерениям доступны обобщенные координаты $q_1(t)$ и токи якорей электроприводов, пересчитанные в электрические моменты $\upsilon(t)$;

3) масса схвата с грузом полагается неизвестной, ограниченной кусочно-гладкой функцией времени с ограниченной производной, что обуславливает существенную параметрическую неопределенность матриц I , C , G механической подсистемы (3.1);

4) внешние возмущения $\eta(t) = \text{col}(\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))$ полагаются неизвестными, ограниченными, кусочно-гладкими функциями времени с ограниченными производными:

$$|\eta_i^{(j)}(t)| \leq H_{ji} = \text{const}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, 1}.$$

Внешние возмущения являются несогласованными: они действуют на второе уравнение системы (3.1) и их нельзя непосредственно подавить или компенсировать с помощью истинного управления u , что приводит к постановке задачи слежения с заданной точностью. Цель управления состоит в обеспечении стабилизации ошибки слежения $e_1 = y_1 - g \in R^n$:

$$|e_{1i}(t)| \leq \delta_1, \quad t \geq T, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.5)$$

Заметим, что в электромеханической системе с конкретными ИУ (3.2) минимально возможные значения δ_1^* , T^* в (3.5) обусловлены имеющимися ресурсами управления $b_i k_{3i} > 0$, $i = \overline{1, n}$. При проектировании электромеханической системы, предназначенной для выполнения различных работ в условиях неопределенности, ставится задача выбора ИУ

определенной мощности, способных обеспечить заданную точность слежения δ_1 (3.5) с учетом наихудших возмущений. В данной главе решается именно эта проблема, которая разделяется на две последовательно решаемых подзадачи:

1) в механической подсистеме решается задача слежения за заданными траекториями выходных переменных (3.5) путем синтеза обобщенных моментов $v = \text{col}(v_1, \dots, v_n)$;

2) в ИУ (3.2) решается задача слежения за сформированными обобщенными моментами $v^* \in R^n$, т.е. задача стабилизации ошибки слежения $v - v^* \in R^n$ путем синтеза истинного разрывного управления $u = \text{col}(u_1, \dots, u_n)$, $u_i = k_{zi} \text{sign}(v_i - v_i^*)$, $i = \overline{1, n}$. Выбор амплитуд переключений $b_i k_{zi} > 0$ обуславливает выбор подходящих ИУ. Заметим, что в условиях неполных измерений ставится также задача оценивания с помощью наблюдателя состояний неизмеряемых сигналов, необходимых для формирования задающих воздействий $v^*(t)$ для ИУ.

Таким образом, в системе (3.1)–(3.2) обобщенные моменты v выполняют двойную функцию, что накладывает ряд ограничений на выбор локальной связи. В механической подсистеме (3.1) они играют роль фиктивных управлений и должны выбираться из класса непрерывных ограниченных функций, способных обеспечить (3.5). Эти сигналы для электрической подсистемы (3.2) служат задающими воздействиями $v^*(t)$, их отработка обеспечивается с помощью истинного управления u , следовательно, и производные этих сигналов должны быть ограниченными до k -го порядка включительно, k – относительная степень учитываемой динамической модели ИУ. В данном случае (3.2) $k=1$, отсюда следует требование (3.3).

В замкнутой системе реализуется принцип декомпозиции и появляется возможность выбора различных комплектных ИУ, способных отработать

задающие воздействия, сформированные в механической подсистеме с учетом (3.3). Решение именно этой проблемы не вызывает трудностей, так как модель исполнительных устройств (3.2) является элементарной. В то же время, принимая во внимание существенную неопределенность механической подсистемы (3.1), решение предварительных задач – синтез обобщенных моментов, обеспечивающих (3.5) с учетом (3.3), и формирование задающих сигналов для ИУ требует привлечения и разработки специальных подходов, которые представлены в следующем разделе.

3.2. Решение задачи слежения в механической подсистеме

К синтезу системы управления пространственной ориентацией рабочего органа возможно два подхода. Первый состоит в том, что с помощью обратных функций $q_1(y_1)$ формируются задающие воздействия для обобщенных координат и на основе модели (3.1) реализуются известные методы синтеза, например [5, 35, 42, 69]. Однако обратная задача о положении имеет однозначное и аналитическое решение только для ограниченного класса простых манипуляторов [26]. Поэтому большую значимость приобретает второй, так называемый прямой метод решения [29, 31, 38], который реализуется в данной главе. Суть прямого метода заключается в том, что синтез выполняется на основе системы дифференциальных уравнений, записанной непосредственно относительно регулируемых переменных $y_1 = h(q_1(t))$ и их производных.

С помощью диффеоморфной замены локальных переменных приведем механическую подсистему (3.1) к указанному виду:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J(q_1)q_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 &= J'(q_1, q_2)q_2 + J(q_1)\dot{q}_2 = A_2(q_1, q_2, t) + B_2(q_1)v, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $J_{n \times n} = (\partial h / \partial q_1) = (J_{ij})$, $J'_{n \times n} = (J'_{ij})$, $J'_{ij} = (\partial J_{ij} / \partial q_1)q_2$; матрица $B_2 = J(q_1)I^{-1}(q_1)$ является произведением невырожденных матриц, следовательно, $\det B_{2(n \times n)}(q_1) \neq 0$, $q_1 \in \bar{Q}_1$; ее элементы и элементы вектор-

функции $A_2 = J'(q_1, q_2)q_2 - B_2(q_1)[C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) - \eta(t)]$ содержат неизвестные, ограниченные составляющие.

Система (3.6) имеет блочно-канонический вид, что позволяет реализовать блочный принцип управления [15, 23, 35, 37, 40, 62]. Запишем первое уравнение системы (3.6) относительно ошибок слежения $e_1 = y_1 - g \in R^n$: $\dot{e}_1 = y_2 - \dot{g}$. Согласно идеологии блочного подхода, здесь вектор y_2 трактуется как фиктивное управление и выбирается в виде $y_2^* = \dot{g} - K_1 e_1$, где $K_1 = \text{diag}(k_{1i})$, $k_{1i} = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, n}$. Для обеспечения сформированной локальной связи нужно решить задачу стабилизации невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением $e_2 = y_2 - \dot{g} + K_1 e_1$. После указанных невырожденных замен переменных в силу (3.6) получим

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2, \quad (3.7)$$

$$\dot{e}_2 = \phi(t) + B_2(q_1)v, \quad (3.8)$$

где элементы вектор-функции $\phi(t) = A_2(q_1, q_2, t) - g_2(t) - K_1^2 e_1(t) + K_1 e_2(t)$ и их производные в силу априорных предположений ограничены:

$$|\phi_i^{(j)}(t)| \leq F_{ji} = \text{const}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = 0, 1.$$

Линейная локальная связь $y_2 = \dot{g} - K_1 e_1$ принята с целью обеспечить в подсистеме (3.7) экспоненциальную сходимость ошибок слежения в заданную окрестность нуля (3.5). Здесь и далее для формализации достаточных условий сходимости используется второй метод Ляпунова, в котором также реализуется принцип декомпозиции. Так, для системы (3.7)–(3.8) вводится квадратичная форма в виде суммы квадратичных форм

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} e_1^T e_1 + \frac{1}{2} e_2^T e_2, \quad V_j = \sum_{i=1}^n V_{ji} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (e_{ji})^2, \quad j = 1, 2. \quad (3.9)$$

Для производной первого слагаемого квадратичной формы (3.9) справедлива

$$\text{оценка: } \dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T (e_2 - K_1 e_1) \leq \sum_{i=1}^n |e_{1i}| (|e_{2i}| - k_{1i} |e_{1i}|). \quad \text{Неравенство } \dot{V}_1 < 0$$

обеспечивается вне области $|e_{1i}| \leq |e_{2i}| / k_{1i} \leq \delta_1$, $i = \overline{1, n}$ при выполнении условий $k_{1i} > |e_{2i}| / \delta_1$, откуда при фиксированных значениях k_{1i} определяется точность

$$|e_{2i}(t)| \leq k_{1i} \delta_1 = \delta_{2i} = \text{const}, t \geq T, i = \overline{1, n}, \quad (3.10)$$

которую требуется обеспечить при стабилизации переменных подсистемы (3.8). Коэффициенты $k_{1i} > 0$ назначаются исходя из заданных темпов затухания собственных движений ошибок слежения $e_{1i}(t)$ (3.5), а именно $|e_{1i}(0)| e^{-k_{1i} T} < \delta_1$, в которых учтены конструктивные ограничения (3.4) на переменные состояния механической системы $|e_{1i}(t)| \leq 2Y_{0i}$, $|\dot{e}_{1i}(t)| \leq 2Y_{1i}$, $t \geq 0$:

$$\frac{1}{T} \ln \frac{|e_{1i}(0)|}{\delta_1} < k_{1i} < \frac{Y_{1i}}{Y_{0i}}, i = \overline{1, n}. \quad (3.11)$$

Задача синтеза фиктивного управления $v \in \mathbb{R}^n$ в подсистеме (3.8), обеспечивающего (3.10), нетривиальна: входные каналы действия v представлены матрицей $B_2 = J(q_1)I^{-1}(q_1)$, которая в отличие от матрицы $I^{-1}(q_1) > 0$ не является знакоопределенной и содержит существенную параметрическую неопределенность, обусловленную неизвестной массой груза. Из-за невозможности сформировать комбинированное управление, будем искать закон фиктивного управления в виде $v^*(e_2)$. Класс допустимых локальных связей – непрерывные, ограниченные функции с ограниченными производными (3.3), с помощью которых можно обеспечить ε -инвариантность к имеющимся неопределенностям. Этим требованиям удовлетворяет S -образная гладкая сигма-функция. В отличие от обычно используемой линейной обратной связи с большими коэффициентами, необходимыми для подавления возмущений, сигма-функция всюду ограничена, что позволяет уменьшить перерегулирование переменных состояния, которые выступают фиктивными управлениями.

3.3. Иерархическая процедура синтеза сигмоидальных обобщенных моментов в условиях неопределенности входных каналов

В данном разделе разработана процедура синтеза сигмоидальных локальных связей $v^*(e_2)$ в подсистеме (3.8), удовлетворяющих (3.3) и обеспечивающих (3.10) в условиях параметрической неопределенности матрицы $B_2 = (b_{ij})$. Рассматривается общий случай, когда матрица B_2 невырожденная, не имеет преобладающей диагонали, аналитический вид ее элементов известен, их текущие значения неизвестны, но ограничены:

$$\bar{b}_{ij} \leq |b_{ij}(q_1, t)| \leq \bar{\bar{b}}_{ij}, \quad q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1, \quad t \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (3.12)$$

Будем обозначать миноры матрицы B_2 различных порядков путем непосредственного перечисления сначала номеров строк, а потом номеров столбцов, на пересечении которых стоят образующие их элементы, например, $\Delta_{1,1} = b_{11}$, $\Delta_{12,12} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$, $\Delta_{13,12} = b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}$ и т. д. Для простоты изложения будем полагать, что все главные диагональные миноры матрицы B_2 не обращаются в нуль в рассматриваемой области и их знаки известны, т. е. в упрощенных обозначениях $\Delta_{1,1} := \Delta_1 \neq 0$, $\Delta_{12,12} := \Delta_2 \neq 0$, ..., $\Delta_{12\dots n, 12\dots n} := \Delta_n = \det B_2 \neq 0$ и

$$\text{sign}(\Delta_i(q_1)) = \text{const}, \quad q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.13)$$

при этом в системе (3.8) порядковые номера управляемых e_{2i} и управляющих ими переменных v_i ($i = \overline{1, n}$) совпадают. Заметим, что сопоставление управляемых и управляющих переменных будет иным, если цепочка окаймляющих миноров от первого до $(n-1)$ -го порядка не обращается в нуль. Так как матрица B_2 полного ранга, такая цепочка миноров существует, но может быть разной в разных участках области \bar{Q}_1 , что потребует логического переключения алгоритма управления в зависимости от разбиения области \bar{Q}_1 (см. раздел 3.6).

Для подсистемы (3.8) с учетом (3.13) введем закон сигмоидального управления

$$\begin{aligned} v_i^* &= -m_{2i} \text{sign}(\tilde{b}_{ii}) \sigma(k_{2i} e_{2i}), \\ m_{2i}, k_{2i} &= \text{const} > 0, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\tilde{b}_{11} = b_{11} = \Delta_1$, $\tilde{b}_{ii} = \Delta_i / \Delta_{i-1} \neq 0$, $\sigma(k_{2i} e_{2i})$ – сигма-функция от указанного аргумента (2.1), $i = \overline{2, n}$. В силу (3.10), (2.19), (2.22), сразу составим неравенства для выбора коэффициентов наклона

$$|e_{2i}| \leq 2,2 / k_{2i} \leq k_{1i} \delta_1 = \delta_{2i} \Rightarrow k_{2i} \geq 2,2 / (k_{1i} \delta_1), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.15)$$

а для нахождения амплитуд сигмоидальных управлений (3.14), обеспечивающих сходимость переменных состояния в заданные окрестности нуля (3.15), используем идеологию метода иерархии управлений [31, 38], основанную на иерархии сходимости компонент вектора e_2 в области (3.15), которая, например, совпадает с их порядковыми номерами:

$$\begin{aligned} |e_{21}| \leq \delta_{21}, \quad t > t_{21} > 0 &\Rightarrow |e_{22}| \leq \delta_{22}, \quad t > t_{22} > t_{21} \Rightarrow \dots \\ &\Rightarrow |e_{2n}| \leq \delta_{2n}, \quad t > t_{2n} > t_{2, n-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Идея заключается в том, что для замкнутой подсистемы (3.8), (3.14) последовательно, сверху вниз составляются неравенства типа (2.13) для выбора m_{2i} , при которых за конечное время последовательно обеспечивается стабилизация переменных состояния с заданной точностью (3.16). При этом уравнения статики $\dot{e}_{2i} = 0$, $\ddot{e}_{2i} = 0$ выполняются с некоторой точностью: $|\dot{e}_{2i}| \leq \beta_{1i}$, $|\ddot{e}_{2i}| \leq \beta_{2i}$, $t \geq t_{2i}$, $i = \overline{1, n}$ (следствие 1 леммы 2.2). Тот факт, что верхние оценки областей сходимости производных не зависят непосредственно от параметров m_{2i}, k_{2i} (см. (2.29)), позволяет после анализа каждого i -го уравнения выразить из него v_i и подставить в нижние уравнения подсистемы (3.8) с номерами $i+1, i+2, \dots, n$. Таким образом, управления $v_i, i = \overline{1, n-1}$ последовательно исключаются из подсистемы (3.8),

а для матрицы B_2 в режиме off-line будет получен аналитически верхнетреугольный вид.

Формализуем указанный алгоритм. Как известно [20], приведение матрицы B_2 методом Гаусса к верхнетреугольному виду при выполнении (3.13) равносильно ее умножению слева на преобразующую матрицу $T_{n \times n}$, $\det T \neq 0$, которая является произведением нижнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали: $T_{n \times n} = T_{n-1} T_{n-2} \dots T_2 T_1$, $\det T_i \neq 0$.

Пусть T_{ij} – j -й n -мерный столбец матрицы $T_i = (T_{i1} T_{i2} \dots T_{in}) \in R^{n \times n}$, $i = \overline{1, n-1}$, во всех матрицах все столбцы T_{ij} при $i \neq j$ единичные, т. е. в них j -й элемент равен единице, остальные равны нулю; $T_{ii} = \text{col}(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, где $a_{ki} = 0$ при $1 \leq k < i$; $a_{kk} = 1$, при $i < k \leq n$ имеем: $a_{ki} = -\Delta_{12\dots i-1, k; 12\dots i-1, i} / \Delta_i$, в частности

$$\begin{aligned} a_{k1} &= -\Delta_{k,1} / \Delta_1 \Rightarrow T_{11} = \text{col}(1, -b_{21} / b_{11}, -b_{31} / b_{11}, \dots, -b_{n1} / b_{11}); \\ a_{k2} &= -\Delta_{1k,12} / \Delta_2 \Rightarrow T_{22} = \text{col}(0, 1, -\Delta_{13,12} / \Delta_2, -\Delta_{14,12} / \Delta_2, \dots, -\Delta_{1n,12} / \Delta_2), \dots, \\ T_{n-1, n-1} &= \text{col}(0, 0, \dots, 0, 1, -\Delta_{12\dots n-2, n; 12\dots n-2, n-1} / \Delta_{n-1}). \end{aligned}$$

Соответственно, матрица T также является нижнетреугольной с единицами на главной диагонали, ее элементы $T = (\tilde{a}_{ij})$ определяются рекуррентно следующим образом:

$$\tilde{a}_{ij} = 0, \quad i < j, \quad \tilde{a}_{ii} = 1, \quad \tilde{a}_{ij} = \sum_{k=i-1}^j a_{ik} \tilde{a}_{kj}, \quad i > j, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n},$$

например, $\tilde{a}_{i, i-1} = a_{i, i-1}$, $i = \overline{2, n}$; $\tilde{a}_{i, i-2} = a_{i, i-1} \tilde{a}_{i-1, i-2} + a_{i, i-2}$, $i = \overline{3, n}$.

Умножив обе части уравнения (3.8) на матрицу T , получим:

$$T\dot{e}_2 = T\phi + TB_2 v^* \Rightarrow \dot{e}_2 = \psi + \gamma + \tilde{B}_2 v^*, \quad (3.17)$$

где $\psi(t) = T\phi$; $\gamma = -\tilde{T}\dot{e}_2$, $\tilde{T} = T - E_n$, E_n – единичная матрица, т. е.

$\gamma = \text{col}(0, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} \dot{e}_{2j}$; $\tilde{B}_2 = TB_2 = (\tilde{b}_{ij})$ – верхнетреугольная

матрица, первая строка которой совпадает с первой строкой матрицы B_2 ;

$\tilde{b}_{ij} = 0, i > j; \tilde{b}_{ii} = \Delta_i / \Delta_{i-1} \neq 0$ (3.13); при $2 \leq i < j$ имеем $\tilde{b}_{ij} = \Delta_{12\dots i-1,i;12\dots i-1,j} / \Delta_{i-1}$.

В силу (3.12) вычислим нижние оценки диагональных и верхние оценки остальных ненулевых элементов верхнетреугольной матрицы \tilde{B}_2 :

$$\forall q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1, \forall t \geq 0: \tilde{b}_{ii} \leq |\tilde{b}_{ii}(q_1, t)| i = \overline{1, n}, |\tilde{b}_{ij}(q_1, t)| \leq \bar{\tilde{b}}_{ij}, 2 \leq i < j.$$

Последовательно, сверху вниз составим аналитические неравенства для выбора амплитуд сигмоидальных управлений (3.14) на основе системы (3.17). При этом нижняя оценка $m_{2i}, i = \overline{1, n-1}$ зависит от $m_{2j}, j = \overline{i+1, n}$; на i -м шаге ($i = \overline{2, n}$) функция γ_i и ее производная считаются ограниченными аналогично (2.29). Достаточные условия сходимости (3.16) получим из оценок производных второго слагаемого квадратичной формы (3.9):

$$\begin{aligned} \dot{V}_{21} &= e_{21} \dot{e}_{21} = e_{21} (\dot{\phi}_1 + \sum_{j=2}^n b_{1j} v_j^* - b_{11} m_{21} \text{sign}(b_{11}) \sigma(k_{21} e_{21})) \leq \\ &\leq |e_{21}| (|\dot{\phi}_1| + \sum_{j=2}^n \bar{b}_{1j} m_{2j} - 0,8 \bar{b}_{11} m_{21}); \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} &= e_{2i} \dot{e}_{2i} = e_{2i} (\dot{\psi}_i + \dot{\gamma}_i + \sum_{j=i+1}^n \tilde{b}_{2j} v_j^* - \tilde{b}_{ii} m_{2i} \text{sign}(\tilde{b}_{ii}) \sigma(k_{2i} e_{2i})) \leq \\ &\leq |e_{2i}| (|\dot{\psi}_i| + |\dot{\gamma}_i| + \sum_{j=i+1}^n \bar{\tilde{b}}_{2j} m_{2j} - 0,8 \bar{\tilde{b}}_{ii} m_{2i}), \quad i = \overline{2, n-1}. \end{aligned}$$

С учетом оценок (3.18), достаточные условия $e_{21} \dot{e}_{21} < 0, e_{2i} \dot{e}_{2i} < 0, i = \overline{2, n-1}$ выполняются при выборе

$$m_{21} > 1,25 (|\dot{\phi}_1| + \sum_{j=2}^n \bar{b}_{1j} m_{2j}) / \bar{b}_{11}; \quad (3.19)$$

$$m_{2i} > 1,25 (|\dot{\psi}_i| + |\dot{\gamma}_i| + \sum_{j=i+1}^n \bar{\tilde{b}}_{2j} m_{2j}) / \bar{\tilde{b}}_{ii}, \quad i = \overline{2, n-1}.$$

Из оценки

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2n} &= e_{2n} \dot{e}_{2n} = e_{2n} (\dot{\psi}_n + \dot{\gamma}_n - \tilde{b}_{nn} m_{2n} \text{sign}(\tilde{b}_{nn}) \sigma(k_{2n} e_{2n})) \leq \\ &\leq |e_{2n}| (|\dot{\psi}_n| + |\dot{\gamma}_n| - 0,8 \bar{\tilde{b}}_{nn} m_{2n}) \end{aligned}$$

следует, что достаточные условия $e_{2n}\dot{e}_{2n} < 0$ выполняются при

$$m_{2n} > 1,25(|\psi_n| + |\gamma_n|) / \bar{b}_{nn}. \quad (3.20)$$

После непосредственного выбора численного значения m_{2n} на основе неравенства (3.20), обратным ходом, снизу вверх последовательно выбираются значения m_{2i} , $i = \overline{n-1, 1}$. При выборе параметров сигмоидального управления в виде (3.15), (3.19), (3.20) квадратичная форма (3.9) является функцией Ляпунова для замкнутой системы (3.7)–(3.8), (3.14), что гарантирует решение поставленных задач (3.10) и, следовательно, (3.5).

Для сигмоидальных фиктивных управлений (3.14) в силу (2.19), (3.8) справедливо:

$$\begin{aligned} |v_i^*(t)| &\leq m_{2i} = \bar{v}_{0i}, \quad |\dot{v}_i^*(t)| \leq \left| \frac{\partial v_i^*(e_2)}{\partial e_{2i}} \right| \cdot |\dot{e}_{2i}| \leq \\ &\leq 0,5m_{2i}k_{2i}(F_{0i} + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij}m_{2j}) = \bar{v}_{1i}, t \geq 0, i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Условия (3.21) определяют ограничения (3.3), которые служат основой для выбора подходящих ИУ.

3.4. Синтез наблюдателя состояния пониженного порядка с сигмоидальными корректирующими воздействиями

Для решения задачи слежения в ИУ требуется сформировать задающий сигнал $v^*(e_2(t))$ (3.14). Вычисление в реальном времени сигнала $e_2(t) = y_2 + K_1 e_1 - \dot{g} = J(q_1)q_2 + K_1(y_1 - g) - \dot{g}$ требует слишком много информации: сигнал $e_1(t) = h(q_1(t)) - g(t)$ можно вычислить по измеряемым сигналам $g(t)$ и $q_1(t)$, но возникает проблема измерений или оценки $q_2(t)$, $\dot{g}(t)$. Покажем, что можно снизить требования к объему априорной информации и существенно упростить структуру регулятора, если непосредственно оценивать $e_2(t)$ с помощью наблюдателя состояния пониженного порядка, построенного на основе подсистемы (3.7) в виде

$$\dot{z} = -K_1 z + v, \quad (3.22)$$

где $z \in R^n$ – вектор состояния, $v \in R^n$ – вектор корректирующих воздействий наблюдателя. Задача наблюдения сводится к задаче стабилизации системы, записанной относительно ошибки наблюдения $\varepsilon = e_1 - z$, $\varepsilon \in R^n$, которая в силу (3.7), (3.22) имеет вид

$$\dot{\varepsilon} = -K_1 \varepsilon + e_2 - v. \quad (3.23)$$

Далее покажем, что аналогично лемме 2.2, выбором параметров $m_i, k_i = \text{const} > 0, i = \overline{1, n}$ сигмоидальных корректирующих воздействий

$$\begin{aligned} v &= M \sigma(K \varepsilon), M = \text{diag}(m_i), \\ K &= \text{diag}(k_i), \sigma(K \varepsilon) = \text{col}(\sigma(k_1 \varepsilon_1), \dots, \sigma(k_n \varepsilon_n)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

в замкнутой системе (3.23), (3.24) за заданное время $t > t_0 > 0$ с заданной точностью можно обеспечить стабилизацию не только ошибок наблюдения, но и их производных:

$$|\varepsilon_i(t)| \leq \alpha_i, \quad |\dot{\varepsilon}_i| \leq k_{1i} \alpha_i + \beta_i \Rightarrow |e_{2i} - v_i| \leq \beta_i \ll \delta_{2i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.25)$$

Тогда оценки неизмеряемых сигналов $e_2(t)$ предоставят непосредственно сигмоидальные корректирующие воздействия $v(t) \approx e_2(t)$, $t > t_0$ с заданной точностью $\beta_i = \text{const} > 0, i = \overline{1, n}$.

Анализ квадратичной формы $V = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon + \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^T \dot{\varepsilon}$ выполним на основе системы

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= -K_1 \varepsilon + e_2 - M \sigma(K \varepsilon), \\ \ddot{\varepsilon} &= - \left(K_1 + M \frac{\partial \sigma(K \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} + \phi(t) + B_2(q_1) v, \end{aligned}$$

полученной в силу (3.23), (3.24), (3.8). Для производных квадратичной формы с учетом (2.18)–(2.19) имеем:

$$\varepsilon^T \dot{\varepsilon} \leq \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| (-k_{1i} |\varepsilon_i| + |e_{2i}| - 0,8 m_i) < 0$$

вне окрестности $|\varepsilon_i(t)| \leq 2,2 / k_i \leq \alpha_i$ при $m_i > 1,25 |e_{2i}|$, где $|e_{2i}(t)| \leq 2Y_{1i} + 2k_{1i} Y_{0i}$,

$t \geq 0, i = \overline{1, n};$

$$\dot{\varepsilon}^T \ddot{\varepsilon} \leq \sum_{i=1}^n |\dot{\varepsilon}_i| \left(|\phi_i| + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} m_{2j} - (k_{1i} + 0,18k_i m_i) |\dot{\varepsilon}_i| \right) < 0$$

вне окрестности $|\dot{\varepsilon}_i| \leq k_{1i} \alpha_i + \beta_i$ при

$$k_i > k_i^* = 5,56 \left(|\phi_i| + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} m_{2j} \right) / (m_i (k_{1i} \alpha_i + \beta_i)) - 5,56 k_{1i} / m_i, i = \overline{1, n}.$$

Требования (3.25) будут выполнены при следующем выборе параметров (3.24):

$$m_i > 2,5(Y_{1i} + k_{1i} Y_{0i}), k_i > \max\{2, 2 / \alpha_i, k_i^*\}, i = \overline{1, n}. \quad (3.26)$$

Для наблюдателя (3.22), (3.24) целесообразно принять начальное условие

$$z(0) = e_1(0), \quad (3.27)$$

что обеспечит $\varepsilon(0) = 0$ и $|\varepsilon_i(t)| \leq \alpha_i, t \geq 0, i = \overline{1, n}$ при выборе параметров корректирующих воздействий согласно (3.26).

Следует отметить, что выбор параметров корректирующих воздействий (3.26) не учитывает заданное время оценивания $t_{0i} > 0$:

$|\dot{\varepsilon}_i(t)| \leq k_{1i} \alpha_i + \beta_i, t \geq t_{0i}, i = \overline{1, n}$. Чтобы учесть время сходимости производной из начального значения

$$|\dot{\varepsilon}_i(0)| \leq k_{1i} |\varepsilon_i(0)| + |e_{2i}| + 0,8m_i \leq 2Y_{1i} + 2k_{1i} Y_{0i} + 0,8m_i$$

в данную окрестность, рассмотрим оценку решения

$$\ddot{\varepsilon} = - \left(K_1 + M \frac{\partial \sigma(K\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} + \dot{e}_2(t)$$

на интервале $[0, t_{0i}]$ с учетом $|\dot{e}_{2i}(t)| \leq |\phi_i| + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} m_{2j}$ и (3.27):

$$|\dot{\varepsilon}_i(t)| \leq (2Y_{1i} + 2k_{1i} Y_{0i} + 0,8m_i) e^{(-k_{1i} - 0,18k_i m_i) t_{0i}} + \frac{|\phi_i| + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij} m_{2j}}{k_{1i} + 0,18k_i m_i}, i = \overline{1, n}. \quad (3.28)$$

В силу (3.28) неравенство $|\dot{\varepsilon}_i(t)| \leq k_{1i} \alpha_i + \beta_i$ обеспечивается при выборе

$$\begin{aligned}
k_i &\geq \tilde{k}_i = \max\{\tilde{k}_{i1}, \tilde{k}_{i2}\}, \\
\tilde{k}_{i1} &= \frac{5,56}{m_{1i}t_{0i}} \ln \left(\frac{2Y_{1i} + 2k_{1i}Y_{0i} + 0,8m_i}{k_{1i}\alpha_i + \beta_i - \gamma_i} \right) + \frac{5,56k_{1i}}{m_{1i}}, \\
\tilde{k}_{i2} &= \frac{5,56}{m_{1i}} \left(\frac{|\phi_i| + \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ij}m_{2j}}{\gamma_i} - k_{1i} \right),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

где, например, $\gamma_i = (k_{1i}\alpha_i + \beta_i) / 2$, $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, следующий выбор параметров корректирующих воздействий (3.24),

$$m_i > 2,5(Y_{1i} + k_{1i}Y_{0i}), \quad k_i > \max\{2, 2 / \alpha_i, \tilde{k}_i\}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.30}$$

гарантирует выполнение (3.25) за любое заданное время $t_{0i} > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Тот факт, что невязка e_2 оценивается с заданной точностью (3.25), необходимо принять во внимание при выборе параметров регулятора. Так, с учетом (3.25), неравенство (3.15) заменяется следующим:

$$|e_{2i}| \leq 2,2 / k_{2i} \leq k_{1i}\delta_1 = \delta_{2i} + \beta_i \Rightarrow k_{2i} \geq 2,2 / (k_{1i}\delta_1) - \beta_i, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда также следует

$$\beta_i < 2,2 / (k_{1i}\delta_1), \quad i = \overline{1, n},$$

что является требованием к точности оценивания.

3.5. Решение задачи слежения в электрической подсистеме

На втором этапе с помощью истинного, разрывного управления u требуется обеспечить стабилизацию ошибки слежения $e_3 = v - v^* \in \mathbb{R}^n$ – невязки между истинным $v(t)$ и сформированным $v^*(e_2(t))$ (3.14) фиктивным управлением. В силу (3.2) дифференциальное уравнение относительно ошибки слежения имеет вид

$$\dot{e}_3 = -Ae_3 + f(t) + Bu, \tag{3.31}$$

где $f(t) = -Av^*(t) - Dq_2(t) - \dot{v}^*(t)$, $A = \text{diag}(a_i)$, $B = \text{diag}(b_i)$, $D = \text{diag}(d_i)$, a_i , b_i , $d_i = \text{const} > 0$, элементы вектор-функции $f = \text{col}(f_1, \dots, f_n)$ в силу $q_2 \in Q_2 \subset R^n$ и (3.21) ограничены. Базовый закон разрывного управления с постоянной амплитудой

$$u = -K_3 \text{sign}(e_3), \quad (3.32)$$

где $K_3 = \text{diag}(k_{3i})$, $k_{3i} = \text{const} > 0$, $i = \overline{1, n}$, $\text{sign}(e_3) = \text{col}(\text{sign}(e_{31}), \dots, \text{sign}(e_{3n}))$, приводит к замкнутой подсистеме $\dot{e}_3 = -Ae_3 + f(t) - BK_3 \text{sign}(e_3)$. При выполнении достаточных условий $e_3^T \dot{e}_3 < 0$ [64] на многообразии $e_3 = 0$ за конечное время возникнет скользящий режим. Неравенства для выбора амплитуды разрывного управления имеют вид

$$b_i k_{3i} > |f_i(t)|, |f_i(t)| \leq a_i \bar{v}_{0i} + d_i |q_{2i}| + \bar{v}_{1i}, t \geq 0, i = \overline{1, n} \quad (3.33)$$

и служат основой для выбора ИУ, способных отработать задающие воздействия (3.14), (3.21).

В замкнутой системе управления с наблюдателем (3.22), (3.24) базовый закон разрывного управления (3.32) реализуется в виде $u = -K_3 \text{sign}(v(t) - v^*(v))$.

Использование разрывного управления и организация в замкнутой системе скользящих режимов является эффективным инструментом декомпозиции, обеспечения инвариантности к внешним возмущениям и робастности к параметрическим и функциональным неопределенностям, принадлежащим пространству управления [64]. Синтез разрывных управлений вполне естественен в электрических ИУ, выполненных на базе безынерционных силовых элементов, которые функционируют исключительно в ключевом режиме. Однако эти алгоритмы нельзя задействовать для формирования локальных обратных связей из-за наличия требований к гладкости фазовых переменных. Именно этот факт обусловил введение в качестве альтернативы функции знака S -образной, гладкой сигма-функции, использование которой позволило обеспечить непрерывность и

ограниченность сигналов, а также сохранить преимущества систем с разрывными управлениями в допредельной ситуации.

3.6. Результаты моделирования

Разработанные алгоритмы использованы в задаче управления движением конечной точки трехзвенного манипулятора типа UMS-2, схема которого представлена на рис. 3.1.

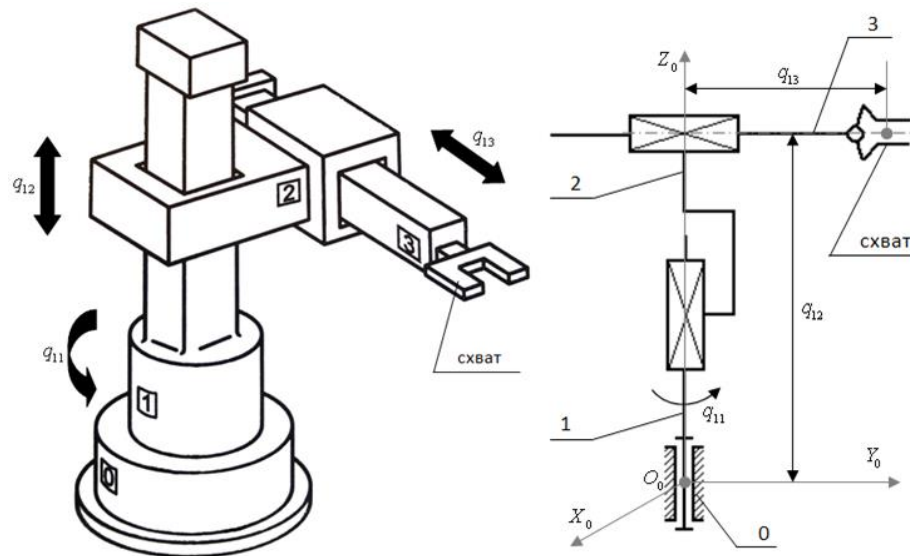


Рис. 3.1. Схема трехзвенного манипулятора

Манипулятор функционирует в цилиндрической системе координат $y_1 = \text{col}(x, y, z) \in R^3$, его обобщенные координаты $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12}, q_{13})$ совершают вращательные, вертикальные линейные и горизонтальные линейные движения, соответственно. На обобщенные координаты и на обобщенные скорости $q_2 = \text{col}(q_{21}, q_{22}, q_{23})$ имеют место следующие конструктивные ограничения:

$$Q_1 : 0,3 \leq q_{12}(t) \leq 1,9, \quad 0,1 \leq q_{13}(t) \leq 0,8 \text{ [м];}$$

$$Q_2 : |q_{21}(t)| \leq 1 \text{ [рад/с]}, \quad |q_{22}(t)| \leq 1, \quad |q_{23}(t)| \leq 1 \text{ [м/с]}.$$

Матрицы механической подсистемы (3.1) имеют вид [21]:

$$I_{3 \times 3} = \text{diag}(I_i) > 0,$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= (m'_3 + m_3)q_{13}^2 + m'_3 l q_{13} + m'_3 \frac{l^2}{3} + J_1 + J_2, \\
I_2 &= m_2 + m'_3 + m_3, I_3 = m'_3 + m_3; \\
Cq_2 &= \text{col}(C_1, C_2, C_3), C_1 = 2[(m'_3 + m_3)q_{13} - m'_3 \frac{l}{2}]q_{23}q_{21}, \\
C_2 &= 0, C_3 = [m'_3 \frac{l}{2} - (m'_3 + m_3)q_{13}]q_{21}^2, \\
G &= \text{col}(G_1, G_2, G_3), G_1 = 0, G_2 = (m_2 + m'_3 + m_3)\tilde{g}, G_3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Описание параметров (3.34) приведено в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Описание параметров объекта управления

Обозначение	Описание, единица измерения
$J_1 = 0,03$	приведенный момент инерции частей манипулятора, участвующих во вращательном движении, [кг · м ²]
$m_2 = 6,5$	приведенная масса частей, участвующих в поступательном вертикальном движении [кг]
$J_2 = 0,06$	момент инерции частей манипулятора, участвующих во вращательном движении, который приведен к вертикальной оси, [кг · м ²]
$m'_3 = 5,5$	масса руки манипулятора, [кг]
$l = 0,9$	длина руки манипулятора, [м]
$m_3(t)$	неизвестная точечная масса схвата с грузом, [кг]
$\tilde{g} = 9,81$	ускорение свободного падения, [м / с ²]

При моделировании масса схвата с грузом m_3 и внешние возмущения $\eta = \text{col}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ полагались кусочно-гладкими периодическими функциями времени $t \geq 0$ [с] с указанными главными периодами:

$$\begin{aligned}
m_3 &= 2 \cos \frac{t}{2}, 0 \leq t < 3; \\
\eta_1 &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0,2, & 2 < t < 4 \end{cases}, \eta_2(t) = 0, \eta_3(t) = 0,1t - 0,2, 0 \leq t < 3.
\end{aligned}$$

Требовалось обеспечить движение конечной точки манипулятора по пространственной траектории, заданной параметрически в системе координат схвата

$$\begin{aligned}x: g_1 &= (0, 2 \cos 0,4t + 0,5) \cos 0,4t \text{ [м]}; \\y: g_2 &= (0, 2 \cos 0,4t + 0,5) \sin 0,4t \text{ [м]}; \\z: g_3 &= 0,4 \sin 0,4t + 1 \text{ [м]}\end{aligned}$$

из начальных условий

$$\begin{aligned}q_{11}(0) &= 0,19 \text{ [рад]}, \quad q_{12}(0) = 1,22 \text{ [м]}, \quad q_{13}(0) = 0,79 \text{ [м]}, \\v_i(0) &= 1 \text{ [Н·м]}, \quad i = \overline{1,3}.\end{aligned}$$

Выходные переменные системы (3.1), (3.34) являются функциями обобщенных координат

$$y_1 = \text{col}(x, y, z): x = q_{13} \cos q_{11}, y = q_{13} \sin q_{11}, z = q_{12},$$

в представлении системы (3.34) в виде (3.7)–(3.8) матрицы $J = (\partial y_1 / \partial q_1)$ и B_2 имеют вид:

$$\begin{aligned}J &= \begin{pmatrix} -q_{13} \sin q_{11} & 0 & \cos q_{11} \\ q_{13} \cos q_{11} & 0 & \sin q_{11} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\B_2 = J \cdot I^{-1} &= \begin{pmatrix} -q_{13} \sin q_{11} I_1^{-1} & 0 & \cos q_{11} I_3^{-1} \\ q_{13} \cos q_{11} I_1^{-1} & 0 & \sin q_{11} I_3^{-1} \\ 0 & I_2^{-1} & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.35}$$

где $\det J = q_{13} \neq 0$, $0,08 \leq I_1^{-1} \leq 0,47$, $0,07 \leq I_2^{-1} \leq 0,08$, $0,12 \leq I_3^{-1} \leq 0,18$.

В силу структуры матрицы B_2 (3.35) в подсистеме (3.8) переменная e_{23} независимо управляется с помощью фиктивного управления

$$v_2^* = -m_{22} \sigma(k_{23} e_{23}), \quad m_{22} > 1,25 |\phi_3| \bar{I}_2, \quad k_{23} \geq 2,2 / (k_{13} \delta_1).\tag{3.36}$$

Для управления переменными e_{21} и e_{22} используем метод иерархии (3.16). Условия типа (3.13) не выполняются для всех $q_{11} \in Q_1$, поэтому разобьем главный период $0 \leq q_{11}(t) \leq 2\pi$ на 4 интервала знакопостоянства элементов $\Delta_1 = b_{11}$ и $\Delta_{1,3} = b_{13}$, $\Delta_2 = \Delta_{12,13} = -q_{13} I_1^{-1} I_3^{-1} < 0$, где сопоставление

управляемых e_{21} , e_{22} и управляющих v_1, v_3 переменных будет разным, а именно:

$$\begin{aligned}
 1) \quad q_{11} \in [0; \pi / 4], (7\pi / 4; 2\pi]: v_1^* &= -m_{21}\sigma(k_{22}e_{22}), v_3^* = -m_{23}\sigma(k_{21}e_{21}); \\
 2) \quad q_{11} \in (\pi / 4; 3\pi / 4]: v_1^* &= +m_{21}\sigma(k_{21}e_{21}), v_3^* = -m_{23}\sigma(k_{22}e_{22}); \\
 3) \quad q_{11} \in (3\pi / 4; 5\pi / 4]: v_1^* &= +m_{21}\sigma(k_{22}e_{22}), v_3^* = +m_{23}\sigma(k_{21}e_{21}); \\
 4) \quad q_{11} \in (5\pi / 4; 7\pi / 4]: v_1^* &= -m_{21}\sigma(k_{21}e_{21}), v_3^* = +m_{23}\sigma(k_{22}e_{22}); \\
 k_{2j} &\geq 2, 2 / (k_{1j}\delta_1), j = 1, 3.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Во 2-м и 4-м интервалах $\text{sign}(b_{11}) = \text{const}$, за основу принимается главная диагональ, в процессе преобразования матрицы B_2 обнуляется элемент \tilde{b}_{21} . Аналогично (3.19) имеем:

$$\begin{aligned}
 m_{21(2,4)} &> 1,25(|\phi_1| + \bar{b}_{13}m_{23(2,4)}) / \bar{b}_{11}; \\
 m_{23(2,4)} &> 1,25(\bar{b}_{11}|\phi_2| + \bar{b}_{21}(|\dot{e}_{21}| + |\phi_1|)) / \bar{\Delta}_{12,13}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

В 1-м и 3-м интервалах $\text{sign}(b_{13}) = \text{const } b_{13}$, за основу принимается побочная диагональ, в процессе преобразования матрицы B_2 обнуляется элемент \tilde{b}_{23} :

$$\begin{aligned}
 m_{23(1,3)} &> 1,25(|\phi_1| + \bar{b}_{11}m_{21(1,3)}) / \bar{b}_{13}; \\
 m_{21(1,3)} &> 1,25(\bar{b}_{13}|\phi_2| + \bar{b}_{23}(|\dot{e}_{21}| + |\phi_1|)) / \bar{\Delta}_{12,13}.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Для математической модели (3.7)–(3.8), составленной для манипулятора (3.34)–(3.35) с сигмоидальными фиктивными управлениями (3.36)–(3.37), ставилась задача синтеза разрывного управления (3.32) и выбора ИУ (3.2), обеспечивающих решение задачи слежения (3.5), где

$$|e_{li}(t)| \leq 0,05 \text{ [м]}, t \geq 3 \text{ [с]}, i = \overline{1,3}. \tag{3.40}$$

После подстановки параметров манипулятора в неравенства (3.11), (3.15), (3.36), (3.38), (3.39) были приняты коэффициенты локальных связей

$$\begin{aligned}
 k_{li} &= 1, i = \overline{1,3}, k_{21} = k_{22} = 10, k_{23} = 250, \\
 m_{21(2,4)} &= m_{23(1,3)} = 180, m_{23(2,4)} = m_{21(1,3)} = 120, m_{22} = 880,
 \end{aligned}$$

на основе которых с учетом (3.21), (3.33) были выбраны ИУ (3.2) с параметрами

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(430, 430, 430), \quad D = \text{diag}(2, 8, 2), \\ B &= \text{diag}(42, 3000, 58), \quad k_{3i} = 24 \text{ [В]}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Прямым измерениям были доступны сигналы e_{1i} и v_i . Для получения оценки сигнала e_{2i} был построен наблюдатель (3.22) с начальными условиями

$$z_1(0) = e_{11}(0) = 0,08, \quad z_2(0) = e_{12}(0) = 0,15, \quad z_3(0) = e_{13}(0) = 0,22 \text{ [м]},$$

параметры корректирующих воздействий которого были выбраны на основе (3.30) для принятой точности $\delta_{2i} = 0,003 \text{ [м/с]}$ и времени оценивания $t_{0i} = 0,3 \text{ [с]}$:

$$k_i = 1000, \quad i = 1, 2, 3, \quad M = \text{diag}(6, 38, 4).$$

Моделирование замкнутой системы (3.1)–(3.2), (3.34) с разрывным управлением (3.32) и наблюдателем (3.22) проводилось в среде Matlab–Simulink. Для интегрирования системы использовался метод Эйлера с постоянным шагом $5 \cdot 10^{-6}$.

На рис. 3.2 показаны графики фиктивных сигмоидальных управлений $v^*(v(t))$, сформированных на основе логики переключений (3.36)–(3.37), а также графики ошибок слежения $e_{3i}(t) = v_i(t) - v_i^*(t)$, $i = 1, 2, 3$ в ИУ.

На рис. 3.3 и 3.4 представлены графики переменных подсистем (3.8) и (3.7) соответственно – невязок $e_{2i}(t)$ и ошибок слежения $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ (пунктиром обозначены границы заданной области (3.40)). На рис. 3.5 показаны заданная пространственная траектория и траектория конечной точки манипулятора.

В таблице 3.2 отражены показатели качества оценивания невязки $e_{2i}(t)$, рассчитанные по ошибке оценивания $\tilde{\varepsilon}_i(t) = e_{2i}(t) - v_i(t)$: время оценивания t_{0i}^* : $|\tilde{\varepsilon}_i(t)| \leq 0,03$, $t \geq t_{0i}^*$; величина перерегулирования $\tilde{\varepsilon}_{i,\max} \geq |\tilde{\varepsilon}_i(t)|$, $t \geq 0$; точность $\delta_{2i}^* \geq |\tilde{\varepsilon}_i(t)|$, достигнутая в установившемся режиме.

В табл. 3.3 представлены аналогичные показатели качества регулирования, рассчитанные по ошибке слежения $e_{li}(t)$: время регулирования t_{li}^* : $|e_{li}(t)| \leq 0,05$, $t \geq t_{li}^*$; величина перерегулирования $e_{li,\max} \geq |e_{li}(t)|$, $t \geq 0$; точность $\delta_{li}^* \geq |e_{li}(t)|$ в установившемся режиме.

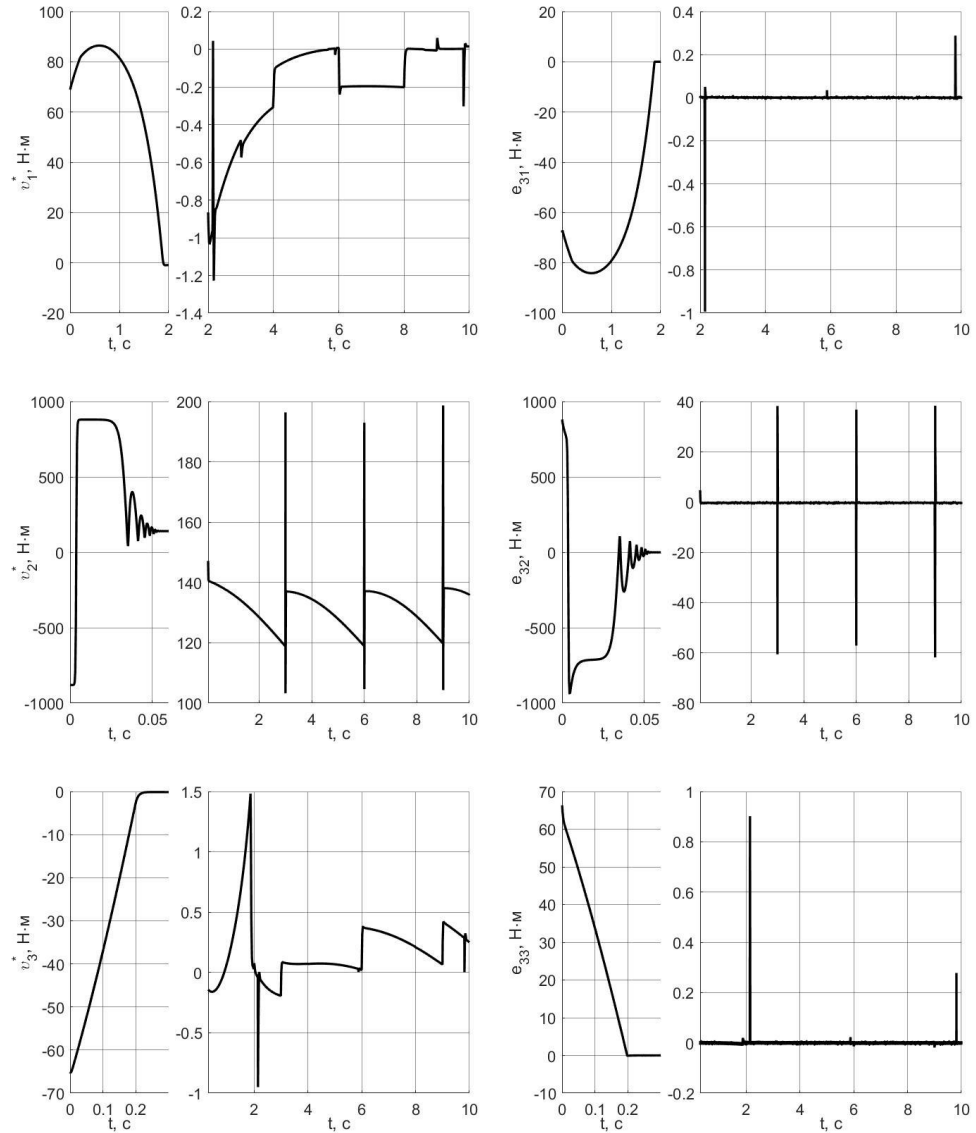


Рис. 3.2. Графики задающих воздействий $v_i^*(t)$ и ошибок слежения

$$e_{3i}(t) = v_i(t) - v_i^*(t), \quad i = 1, 2, 3 \text{ в электрической подсистеме}$$

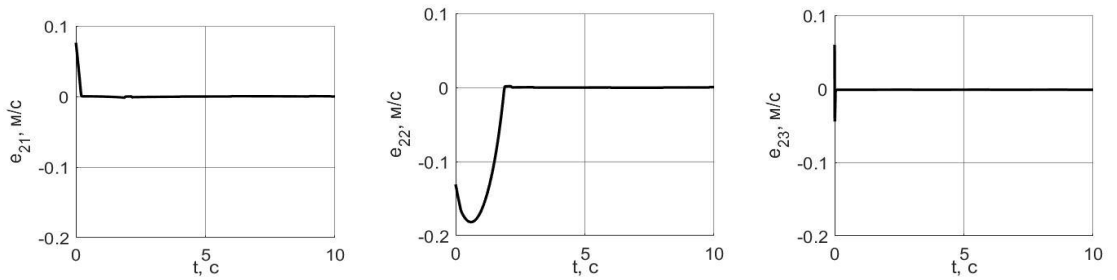


Рис. 3.3. Графики невязок $e_{2i}(t) = y_{2i} - \dot{g}_i + k_{li}e_{li}$, $i = 1, 2, 3$

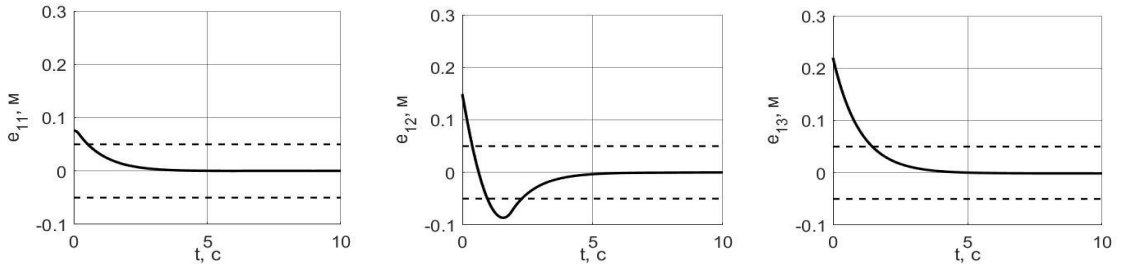


Рис. 3.4. Графики ошибок слежения $e_{li}(t) = y_{li}(t) - g_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ в механической подсистеме

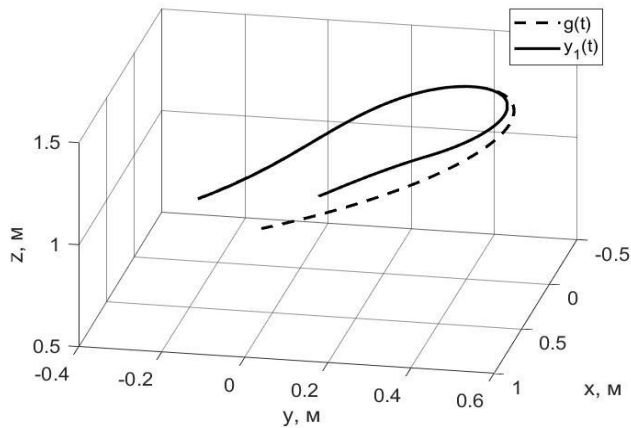


Рис. 3.5. Заданная $g(t)$ и реальная $y_1(t)$ пространственные траектории конечной точки манипулятора

Таблица 3.2. Значения показателей качества оценивания

Показатель	Ошибка оценивания		
	$\tilde{\varepsilon}_1$	$\tilde{\varepsilon}_2$	$\tilde{\varepsilon}_3$
t_{0i}^* , с	0,0012	0,0002	0,0071
$\tilde{\varepsilon}_{i,max}$, М/с	0,1257	0,1028	0,0600
δ_{2i}^* , М/с	$4,92 \cdot 10^{-5}$	$1,79 \cdot 10^{-5}$	$3,52 \cdot 10^{-4}$

Из табл. 3.2 следует, что выбранные параметры корректирующих воздействий наблюдателя позволили обеспечить оценки

$$|e_{2i}(t) - v_i(t)| \leq 0,003 \text{ [м/с]}, t \geq 0,0071 \text{ [с]}.$$

Таблица 3.3. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Ошибка слежения		
	e_{11}	e_{12}	e_{13}
t_{li}^* , с	0,5273	2,2841	1,4596
$e_{li,max}$, М	0,0758	0,1492	0,2200
δ_{li}^* , М	$3,03 \cdot 10^{-4}$	$4,61 \cdot 10^{-4}$	0,0012

Отметим, что из-за достаточно больших амплитуд переключений разрывных управлений $b_1 k_{31} = 1008$, $b_2 k_{32} = 72000$, $b_3 k_{33} = 1392$ наблюдается так называемый реальный скользящий режим, который возникает за конечное время в пограничном слое, ширина которого прямо пропорциональна амплитуде переключений (рис. 3.2):

$$|e_{31}(t)| \leq 0,01, |e_{32}(t)| \leq 0,9, |e_{33}(t)| \leq 0,01 \text{ [Н} \cdot \text{м]}.$$

Существенно, что достаточно значимые ошибки слежения в ИУ не оказывают влияние на точность слежения в механической подсистеме (3.40), так как при синтезе обобщенных моментов ставилась задача обеспечения ε -инвариантности к имеющимся неопределенностям.

Как видим, поставленная цель управления (3.40) обеспечивается (рис. 3.4, 3.5, табл. 3.2). Тот факт, что неравенства (3.11), (3.15), (3.19), (3.20) для выбора коэффициентов локальных связей получены из достаточных (избыточных) условий, обеспечивает в установившемся режиме существенно более высокую по сравнению с (3.40) точность слежения (табл. 3.2):

$$|e_{11}(t)| \leq 3,03 \cdot 10^{-4}, |e_{12}(t)| \leq 4,61 \cdot 10^{-4}, |e_{13}(t)| \leq 0,0012 \text{ [м]}.$$

Таким образом, результаты моделирования подтверждают эффективность разработанного подхода.

3.7. Выводы к главе 3

В данной главе для электромеханической системы, функционирующей в условиях неопределенности и неполных измерений, ставилась задача слежения обобщенных координат за траекториями, заданными в системе координат рабочего органа манипулятора.

Основной результат главы – разработанная иерархическая процедура синтеза фиктивных сигмоидальных управлений в условиях неполной информации о входных каналах, которые позволили обеспечить ε -инвариантность по отношению к неопределенностям. Выбор ограниченных сигма-функций в локальных связях был обусловлен имеющимися конструктивными ограничениями на обобщенные моменты и их производные.

Для реализации разработанного закона управления был синтезирован наблюдатель состояния пониженного порядка с сигмоидальными корректирующими воздействиями, который строился на основе системы, замкнутой локальными связями. Данный факт позволил сократить вычислительные затраты и сразу получить оценку невязки, необходимой для закона управления.

Результаты моделирования в системе Matlab-Simulink подтвердили эффективность разработанного подхода к управлению электромеханической системой.

Глава 4. Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния

В качестве объекта управления рассматривается двухроторная электромеханическая система (далее TRMS – от англ. Twin Rotor MIMO System). Особенностью данной системы является существенная нелинейность математической модели, наличие перекрестных связей, сил сухого трения, параметрических неопределенностей и внешних несогласованных возмущений.

В разделе 4.1 для TRMS формализована постановка задачи слежения. В разделе 4.2 в рамках блочного подхода разработан базовый закон разрывного управления, приведена процедура выбора параметров сигмоидальных локальных связей, обеспечивающих стабилизацию ошибки слежения с учетом ограничений на переменные состояния и управления. В разделе 4.3 представлен синтез динамического наблюдателя угловых скоростей с сигмоидальными корректирующими воздействиями. В разделе 4.4 представлены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов. Результаты данной главы опубликованы в [12].

4.1. Описание объекта управления. Постановка задачи

На рис. 4.1 приведена схема TRMS. Механизм состоит из основного винта 1, к которому приложены гравитационный момент M_{FG} , момент сил трения $M_{B\psi}$ и гироскопический момент M_G . К хвостовому винту 2 приложен момент сил трения $M_{B\varphi}$ и момент M_R , возникающий за счет перекрестных связей между винтами.

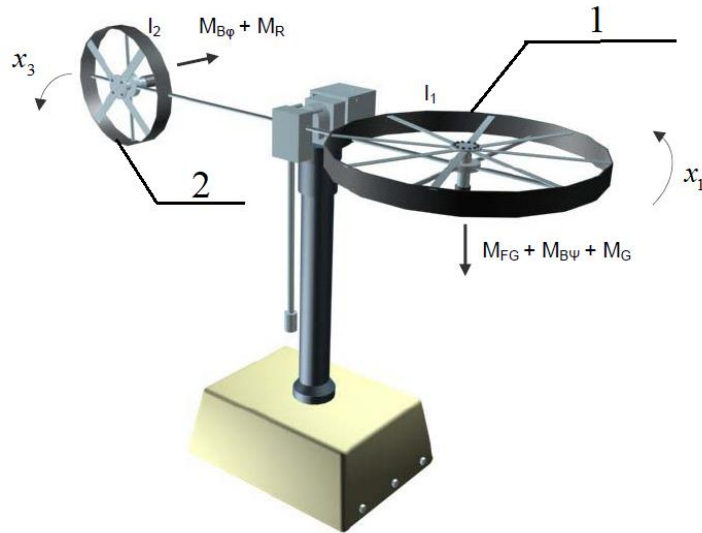


Рис. 4.1. Схема TRMS

Математическая модель, соответствующая приведенной схеме, имеет вид [136]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= [(1 - K_{gy} x_3 \cos x_1) \tilde{\tau}_1 - f_1] / I_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= [\tilde{\tau}_2 - f_2] / I_2, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_5 = k_c \frac{(T_0 T_{10} + T_{11})}{T_p T_{11}} \tau_1 - \frac{1}{T_p} x_5 - \frac{k_c T_0 k_1}{T_p T_{11}} u_1, \quad (4.2)$$

где $x_1 = \psi$ – угол тангажа, $x_3 = \varphi$ – угол рысканья (выходные, регулируемые переменные), $-\pi/2 < x_1(t) < \pi/2$, $0 \leq x_3(t) \leq 2\pi$ – допустимые области изменения угловых положений, x_2, x_4 – угловые скорости, I_1, I_2 – моменты инерции основного и хвостового винтов, K_{gy} – параметр гироскопического момента, $0 < K_{gy} < 1/(2\pi) \Rightarrow 1 - K_{gy} x_3 \cos x_1 > 0$, $f_1 = M_{FG} + M_{B\psi} + \eta_1$ – сумма моментов, приложенных к основному винту, $M_{FG} = M_g \sin x_1$, $M_{B\psi} = B_{1\psi} x_2 + B_{2\psi} \text{sign} x_2$, M_g – параметр гравитационного момента, $B_{1\psi}$ и $B_{2\psi}$ – параметры момента силы трения,

$f_2 = M_{B\phi} + M_R + \eta_2 = B_{1\phi}x_4 + B_{2\phi}\text{sign}x_4 + x_5 + \eta_2$ – сумма моментов, приложенных к хвостовому винту, $M_{B\phi} = B_{1\phi}x_4 + B_{2\phi}\text{sign}x_4$, $B_{1\phi}$ и $B_{2\phi}$ – параметры момента силы трения, η_i – часть обобщенных моментов (в том числе аэродинамических моментов), трактуемых как неизвестные ограниченные возмущения, $|\eta_i(t)| \leq H_i$, $t \geq 0$, $\tilde{\tau}_i = a_i\tau_i^2 + b_i\tau_i$ – моменты, создаваемые приводами на основном и хвостовом винтах соответственно, a_i , b_i – коэффициенты передачи, $i = 1, 2$.

Учитываемая динамика электрических исполнительных устройств (приводов постоянного тока) описывается следующими уравнениями [136]:

$$\dot{\tau}_i = -\frac{T_{i0}}{T_{i1}}\tau_i + \frac{k_i}{T_{i1}}u_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

где τ_i – моменты сил на валу основного и хвостового двигателей; T_{i0} , T_{i1} , k_i – параметры исполнительных устройств, u_i – разрывные управления (напряжения питания якорной цепи электроприводов), $i = 1, 2$. В уравнениях (4.1)–(4.3) все конструктивные коэффициенты положительные.

Для объекта управления (4.1)–(4.3) ставится задача синтеза закона разрывного управления в форме обратной связи, обеспечивающего отслеживание выходными переменными $x_1(t)$ и $x_3(t)$ заданных сигналов $g_1(t)$ и $g_2(t)$ с некоторой точностью за некоторое время

$$|e_{1i}(t)| \leq \Delta_{1i}, \quad i = 1, 2, \quad t > t_{1i} > 0, \quad (4.4)$$

где $e_{11}(t) = x_1(t) - g_1(t)$, $e_{12}(t) = x_3(t) - g_2(t)$ – ошибки слежения, с учетом проектных ограничений на угловые скорости, моменты, развиваемые исполнительными устройствами, и управления

$$\begin{aligned} |x_2(t)| &\leq X_{21}, \quad |x_4(t)| \leq X_{22}, \\ |\tau_i(t)| &\leq T_i < b_i / (2a_i), \\ |\tilde{\tau}_i(t)| &\leq \tilde{T}_i < b_i^2 / (4a_i), \\ |u_i(t)| &\leq U_i, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

выполнение которых надо обеспечить в замкнутой системе.

Ограничения (4.5), обусловленные мощностью комплектных исполнительных устройств, определяют возможные рабочие режимы и точность отслеживания в установившемся режиме при действии неконтролируемых возмущений. В разделе 5.2 будут получены допустимые соотношения между границами проектных ограничений (4.5), а также оценки предельной достижимой точности Δ_{i_i} с учетом (4.5). Проблема обеспечения заданного времени сходимости t_{i_i} или получения его оценки в данной главе не рассматривается.

Отметим, что при выполнении (4.5) решение подсистемы (4.2), которое трактуется как уравнение внутренней динамики, в силу устойчивости собственных движений будет также ограничено:

$$|x_5(t)| \leq X_5 = |x_5(0)| + k_{c,\max} ((T_{0,\max} T_{10,\max} + T_{11,\max}) T_{1,\max} + T_{0,\max} k_{1,\max} U_1) / T_{11,\min}, \quad t \geq 0.$$

С учетом данного факта подсистему (4.2) можно исключить из дальнейших построений, а в подсистеме (4.1), которая является уравнением внешней динамики, рассматривать переменную $x_5(t)$ как внешнее ограниченное возмущение, порождаемое динамической моделью (4.2).

В рамках поставленной задачи выдвигаются следующие предположения:

1) измерениям доступны угловые положения $x_1(t)$, $x_3(t)$, задающие воздействия $g_1(t)$, $g_2(t)$ и токи якорей приводов, по которым восстанавливаются текущие значения моментов сил, создаваемых приводами $\tilde{\tau}_1(t)$, $\tilde{\tau}_2(t)$, шумы в измерениях отсутствуют;

2) генератор задающих воздействий отсутствует, их производные трактуются как ограниченные возмущения

$$|\dot{g}_i(t)| \leq G_{i_i}, \quad t \geq 0; \quad (4.6)$$

3) значения коэффициентов передачи $a_i, b_i, i = 1, 2$ известны, остальные конструктивные коэффициенты точно не известны, имеются только диапазоны их изменения $0 < *_{\min} \leq *(t) \leq *_{\max}, t \geq 0$ (здесь под символом $*(t)$ понимаются неопределенные параметры системы (4.1)–(4.3), которые могут изменяться в процессе эксплуатации), в частности $0 < \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}, \xi = 1 - K_{gy} x_3 \cos x_1$;

4) тот факт, что в замкнутой системе целенаправленно будет обеспечиваться выполнение ограничений (4.5), позволяет принять для целей анализа следующие оценки суммарных моментов

$$\begin{aligned} |f_1(x_1, x_2, t)| &\leq F_1 = M_{g, \max} + B_{1\psi, \max} X_{21} + B_{2\psi, \max} + H_1, \\ |f_2(x_4, x_5, t)| &\leq F_2 = B_{1\varphi, \max} X_{22} + B_{2\varphi, \max} + X_5 + H_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

и трактовать их как неизвестные ограниченные возмущения;

5) система (4.1)–(4.3) является управляемой, т.е. $d\tilde{\tau}_i / d\tau_i \neq 0$ [40], более конкретно:

$$2a_i \tau_i(t) + b_i > 0, t \geq 0.$$

Приведенное условие означает, что в подсистеме

$$\dot{\tilde{\tau}}_i = (2a_i \tau_i(t) + b_i) \cdot \left(-\frac{T_{i0}}{T_{i1}} \tau_i + \frac{k_i}{T_{i1}} u_i \right)$$

коэффициенты при истинных управлениях u_i не обращаются в нуль, следовательно, выбором u_i можно обеспечить желаемое поведение $\tilde{\tau}_i, i = 1, 2$.

4.2. Базовый закон управления

Электромеханическая система (4.1)–(4.3) имеет структуру блочной формы управляемости [34, 40, 62], поэтому целесообразно разбить задачу синтеза управления системой 6-ого порядка на 6 элементарных подзадач, которые решаются последовательным выбором стабилизирующих фиктивных, а потом и истинных управлений в каждом из уравнений. Фиктивными управлениями в уравнениях (4.1) полагаются переменные $x_2,$

$\tilde{\tau}_1$, x_4 и $\tilde{\tau}_2$ соответственно. С целью выполнения проектных ограничений (4.5) на стадии синтеза фиктивных управления предлагается выбирать в виде всюду ограниченных сигма-функций [11, 12, 13, 31, 83, 108, 111]:

$$\begin{aligned} x_2^* &= -m_{11}\sigma(k_{11}e_{11}), \quad x_4^* = -m_{12}\sigma(k_{12}e_{12}), \\ \tilde{\tau}_1^* &= -m_{21}\sigma(k_{21}e_{21}), \quad \tilde{\tau}_2^* = -m_{22}\sigma(k_{22}e_{22}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $k_{ij} = \text{const} > 0$, $m_{ij} = \text{const} > 0$, $\sigma(k_{ij}e_{ij})$ – сигма-функция от указанных аргументов (2.1), $i=1,2, j=1,2$.

Для системы (4.1)–(4.3) сформируем новый координатный базис относительно невязок между переменными x_2 , $\tilde{\tau}_1$, x_4 , $\tilde{\tau}_2$ и выбранными стабилизирующими фиктивными сигмоидальными управлениями (4.8):

$$\begin{aligned} e_{21} &= x_2 - x_2^* = x_2 + m_{11}\sigma(k_{11}e_{11}), \\ e_{22} &= x_4 - x_4^* = x_4 + m_{12}\sigma(k_{12}e_{12}), \\ e_{31} &= \tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_1^* = \tilde{\tau}_1 + m_{21}\sigma(k_{21}e_{21}), \\ e_{32} &= \tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_2^* = \tilde{\tau}_2 + m_{22}\sigma(k_{22}e_{22}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Относительно ошибок слежения и невязок (4.9) приходим к следующей системе с локальными сигмоидальными связями:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{1i} &= e_{2i} - \dot{g}_i - m_{1i}\sigma(k_{1i}e_{1i}), \\ \dot{e}_{2i} &= [\zeta_i(e_{3i} - m_{2i}\sigma(k_{2i}e_{2i})) - f_i] / I_i + \Lambda_{1i}, \\ \dot{e}_{3i} &= (2a_i\tau_i + b_i) \cdot \left(-\frac{T_{i0}}{T_{i1}}\tau_i + \frac{k_i}{T_{i1}}u_i \right) + \Lambda_{2i}, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\zeta_1 = \xi(x_1, x_3)$, $\zeta_2 = 1$;

$$\Lambda_{1i} = 0,5m_{1i}k_{1i}(1 - \sigma^2(k_{1i}e_{1i}))\dot{e}_{1i}, \quad \Lambda_{2i} = 0,5m_{2i}k_{2i}(1 - \sigma^2(k_{2i}e_{2i}))\dot{e}_{2i},$$

в правых частях нижних подсистем для компактности записи фигурируют производные верхних подсистем, вместо которых следует подставить соответствующие выражения.

В системе (4.10) сформируем разрывной закон управления, характерный для электрических исполнительных устройств, работающих в ключевом режиме:

$$\begin{aligned} u_i &= -m_{3i} \text{sign}(e_{3i}), \\ m_{3i} &> 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Параметры фиктивных (4.8) и истинных управлений (4.11) необходимо выбрать так, чтобы обеспечить стабилизацию системы (4.10) и выполнение цели управления (4.4). Согласно идеологии блочного подхода, выбором амплитуд истинных управлений $m_{3i} > 0$ следует обеспечить возникновение скользящих режимов на поверхностях $e_{3i} = 0$, $i = 1, 2$, а выбором амплитуд сигмоидальных фиктивных управлений $m_{ji} > 0$, $j = 1, 2$ – последовательное (снизу вверх) попадание невязок в некоторые окрестности нуля – «линейные» зоны сигмоидальных управлений:

$$\begin{aligned} e_{3i}(t) &= 0, \quad t > t_{3i} > 0, \quad |e_{2i}(t)| \leq \Delta_{2i}, \quad t > t_{2i} > t_{3i}, \\ |e_{1i}(t)| &\leq \Delta_{1i}, \quad t > t_{1i} > t_{2i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Еще раз подчеркнем, что в данной главе проблема оценивания времени сходимости не рассматривается, указанные неравенства для моментов времени отражают последовательность сходимости невязок, соответствующую принципу разделения движений, реализуемого в данном подходе [22, 40, 62].

Границы «линейных» зон, от которых зависит точность стабилизации невязок, определяются выбором коэффициентов наклона:

$$|e_{ji}| \leq 2,2 / k_{ji} \leq \Delta_{ji} \Rightarrow k_{ji} \geq 2,2 / \Delta_{ji}, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2. \quad (4.13)$$

Для настройки амплитуд, обеспечивающих (4.12), используем второй метод Ляпунова. В качестве кандидата на функцию Ляпунова замкнутой

системы (4.10)–(4.11) рассмотрим квадратичную форму в виде суммы

$$\text{квадратичных форм: } V = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 V_{ji}, \quad V_{ji} = \frac{1}{2} e_{ji}^2.$$

С учетом (4.5)–(4.7) и обратных соотношений (4.9), а именно,

$$\begin{aligned} x_2 &= e_{21} - m_{11} \sigma(k_{11} e_{11}), \quad x_4 = e_{22} - m_{12} \sigma(k_{12} e_{21}), \\ \tilde{\tau}_1 &= e_{31} - m_{21} \sigma(k_{21} e_{21}), \quad \tilde{\tau}_2 = e_{32} - m_{22} \sigma(k_{22} e_{22}), \end{aligned}$$

на основе (4.10) можно дать следующие оценки для производных невязок:

$$|\dot{e}_{1i}(t)| \leq \bar{X}_{2i} = X_{2i} + G_{1i}; \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} |\dot{e}_{2i}(t)| &\leq [\zeta_{i,\max} \tilde{T}_i + F_i] / I_{i,\min} + 0,5 m_{1i} k_{1i} |\dot{e}_{1i}(t)| = \\ &= [\zeta_{i,\max} \tilde{T}_i + F_i] / I_{i,\min} + 0,5 m_{1i} k_{1i} \bar{X}_{2i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Полученные оценки достаточно консервативные, что позволяет не учитывать при синтезе возможные небольшие нарушения ограничений по угловым скоростям в начале переходных процессов и опираться на заданные значения $|x_2(t)| \leq X_{21}, |x_4(t)| \leq X_{22}, i = 1, 2$.

Тогда вне областей (4.13), но с учетом иерархии сходимости переменных (4.12) и оценок (4.14), (4.15), для производных квадратичной формы справедливы следующие оценки, в силу которых определяется выбор амплитуд из достаточных условий $e_{ji} \dot{e}_{ji} < 0, j = \overline{1,3}, i = 1, 2$ [64]:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1i} = e_{1i} \dot{e}_{1i} &\leq |e_{1i}| \cdot \left(\frac{2,2}{k_{2i}} + G_{1i} - 0,8 m_{1i} \right) < 0; \\ m_{1i} &> 1,25 \cdot \left(\frac{2,2}{k_{2i}} + G_{1i} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} = e_{2i} \dot{e}_{2i} &\leq |e_{2i}| \cdot \left(\frac{1}{I_{i,\max}} \cdot (-0,8 \zeta_{i,\min} m_{2i} + F_i) + 0,5 m_{1i} k_{1i} \bar{X}_{2i} \right) < 0; \\ m_{2i} &> \frac{1,25}{\zeta_{i,\min}} \cdot (F_i + 0,5 I_{i,\max} m_{1i} k_{1i} \bar{X}_{2i}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{3i} = e_{3i} \dot{e}_{3i} &\leq |e_{3i}| \cdot \left((b_i - 2a_i T_i) \cdot \left(\frac{T_{i0,\max} T_i}{T_{i1,\max}} - \frac{k_{i,\min} m_{3i}}{T_{i1,\max}} \right) + \right. \\ &+ 0,5 m_{2i} k_{2i} (F_{2+i} + 0,5 m_{1i} k_{1i} \bar{X}_{2i}) \left. \right) < 0; \\ m_{3i} &> \frac{T_{i0,\max} T_i}{k_{i,\min}} + \frac{0,5 T_{i1,\max} F_{2+i} + 0,25 T_{i1,\max} m_{1i} k_{1i} \bar{X}_{2i}}{(b_i - 2a_i T_i) k_{i,\min}} m_{2i} k_{2i}, \\ i &= 1, 2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\text{где } F_3 = \frac{1}{I_{1,\min}} \cdot (\xi_{\max} \tilde{T}_1 + F_1), \quad F_4 = \frac{1}{I_{2,\min}} \cdot (\tilde{T}_2 + F_2).$$

При выборе коэффициентов наклона согласно (4.13) и амплитуд управлений согласно (4.16)–(4.18), обеспечивается желаемое поведение (4.12) замкнутой системы (4.10)–(4.11).

Фиктивные сигмоидальные управления (4.8) можно трактовать как фиктивные задающие воздействия для соответствующих переменных, на которые накладываются ограничения, для учета которых необходимо дополнительно ограничить амплитуды управлений сверху заданными константами (4.5) с учетом точности стабилизации (4.13):

$$m_{3i} \leq U_i, \quad m_{2i} \leq \tilde{T}_i, \quad m_{1i} \leq X_{2i} - \frac{2,2}{k_{2i}}. \quad (4.19)$$

Формализуем процедуру выбора параметров, обеспечивающих сходимость невязок (4.12) с учетом проектных ограничений (4.5). Используя (4.16)–(4.19), приходим к двойным неравенствам на выбор амплитуд:

$$\begin{aligned} c_{1i} + m_{2i} k_{2i} (c_{2i} + c_{3i} \cdot m_{1i} k_{1i}) &< m_{3i} \leq U_i, \\ c_{4i} + c_{5i} \cdot m_{1i} k_{1i} &< m_{2i} \leq \tilde{T}_i, \\ 1,25 \cdot \left(\frac{2,2}{k_{2i}} + G_{1i} \right) &< m_{1i} \leq X_{2i} - \frac{2,2}{k_{2i}}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\text{где } c_{1i} = \frac{T_{i0,\max} T_i}{k_{i,\min}}, \quad c_{2i} = \frac{0,5 T_{i1,\max} F_{2+i}}{(b_i - 2a_i T_i) k_{i,\min}}, \quad c_{3i} = \frac{0,25 \cdot T_{i1,\max} \bar{X}_{2i}}{(b_i - 2a_i T_i) k_{i,\min}},$$

$$c_{4i} = 1,25 \cdot \frac{F_i}{\zeta_{i,\min}}, \quad c_{5i} = 0,625 \cdot \frac{I_{i,\max} \bar{X}_{2i}}{\zeta_{i,\min}}, \quad i = 1, 2.$$

Из третьего выражения (4.20) следуют неравенства

$$\begin{aligned} k_{2i} &> \frac{2,2}{0,8m_{1i} - G_{1i}}, \\ k_{2i} &\geq \frac{2,2}{X_{2i} - m_{1i}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из второго и первого выражений (4.20) приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} k_{1i} &< \frac{m_{2i} - c_{4i}}{c_{5i}m_{1i}}, \\ k_{1i} &< \frac{m_{3i} - c_{1i} - c_{2i}m_{2i}k_{2i}}{c_{3i}m_{1i}m_{2i}k_{2i}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Для возможности выполнения ограничений границы в (4.21) и (4.22) должны быть положительными, следовательно, с учетом (4.20) имеем:

$$1,25G_{1i} < m_{1i} < X_{2i}; \quad (4.23)$$

$$c_{4i} < m_{2i} \leq \tilde{T}_i; \quad (4.24)$$

$$m_{3i} - c_{1i} - c_{2i}m_{2i}k_{2i} > 0 \Rightarrow k_{2i} < \frac{m_{3i} - c_{1i}}{c_{2i}m_{2i}}; \quad (4.25)$$

$$c_{1i} < m_{3i} \leq U_i, \quad i = 1, 2.$$

Чтобы расширить верхнюю границу выбора k_{1i} во втором неравенстве (4.22) и, как следствие, повысить предельную достижимую точность (4.4), целесообразно принять максимальное допустимое значение m_{3i} :

$$m_{3i} = U_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.26)$$

Из (4.21) и (4.25) с учетом (4.26) имеем диапазоны для выбора k_{2i} :

$$\frac{2,2}{0,8m_{1i} - G_{1i}} < k_{2i} < \frac{U_i - c_{1i}}{c_{2i}m_{2i}},$$

$$\frac{2,2}{X_{2i} - m_{1i}} \leq k_{2i} < \frac{U_i - c_{1i}}{c_{2i}m_{2i}}, i = 1, 2. \quad (4.27)$$

В (4.27) правые границы должны превышать левые. Отсюда получим:

$$m_{2i} < \frac{(U_i - c_{1i})(0,8m_{1i} - G_{1i})}{2,2c_{2i}},$$

$$m_{2i} < \frac{(U_i - c_{1i})(X_{2i} - m_{1i})}{2,2c_{2i}}, i = 1, 2.$$

Для выполнения данного неравенства потребуем:

$$\tilde{T}_i < \frac{(U_i - c_{1i})(0,8m_{1i} - G_{1i})}{2,2c_{2i}},$$

$$\tilde{T}_i < \frac{(U_i - c_{1i})(X_{2i} - m_{1i})}{2,2c_{2i}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,25 \cdot \left(G_{1i} + \frac{2,2c_{2i}\tilde{T}_i}{U_i - c_{1i}} \right) < m_{1i} < X_{2i} - \frac{2,2c_{2i}\tilde{T}_i}{U_i - c_{1i}}, i = 1, 2. \quad (4.28)$$

Таким образом, приходим к следующим ограничениям на m_{1i} вместо (4.23):

$$1,25 \cdot \left(G_{1i} + \frac{2,2c_{2i}\tilde{T}_i}{U_i - c_{1i}} \right) < m_{1i} < X_{2i} - \frac{2,2c_{2i}\tilde{T}_i}{U_i - c_{1i}}, i = 1, 2. \quad (4.29)$$

Отметим, что из (4.24), (4.25) и (4.29) следуют допустимые соотношения между верхними границами проектных ограничений (4.5), которые должны быть обеспечены априори:

$$c_{1i} < U_i, c_{4i} < \tilde{T}_i, 1,25G_{1i} + \frac{4,95c_{2i}\tilde{T}_i}{U_i - c_{1i}} < X_{2i}, i = 1, 2.$$

При их выполнении формализуем процедуру настройки параметров обратной связи следящей системы:

1) фиксация m_{3i}^* согласно (4.26) и последовательный выбор амплитуд m_{2i}^* из (4.24) и m_{1i}^* из (4.29), $i = 1, 2$;

2) выбор больших коэффициентов k_{2i}^* , близких к нижним границам (4.27), что расширяет верхнюю границу для k_{1i} (4.22) в целях увеличения предельной точности стабилизации ошибок слежения $e_{1i}(t)$. При выбранных k_{2i}^* обеспечивается точность стабилизации невязок $|e_{2i}(t)| \leq 2,2 / k_{2i}^* \leq \Delta_{2i}^*$, $t > t_{2i}$, $i = 1, 2$;

3) выбор больших коэффициентов k_{1i}^* с учетом (4.22) из диапазонов

$$0 < k_{1i} < \overline{k_{1i}} = \min \left\{ \frac{m_{2i}^* - c_{4i}}{c_{5i} m_{1i}^*}, \frac{U_i - c_{1i} - c_{2i} m_{2i}^* k_{2i}^*}{c_{3i} m_{1i}^* m_{2i}^* k_{2i}^*} \right\}, \quad i = 1, 2,$$

верхние границы которых определяют предельную точность стабилизации ошибок слежения $|e_{1i}(t)| < \Delta_{1i}$, $t > t_{1i}$: $0 < \Delta_{1i} < 2,2 / \overline{k_{1i}}$. Заданная величина Δ_{1i}^* может быть достигнута выбором $k_{1i}^* = 2,2 / \Delta_{1i}^*$, если $\Delta_{1i}^* \leq 2,2 / \overline{k_{1i}}$. В противном случае может быть достигнута лишь предельная точность.

Обратим внимание на тот факт, что возможность выполнения проектных ограничений (4.5) на стадии синтеза с помощью описанной процедуры связана с тем, что за счет стабилизации невязок (4.9) фиктивные управления $x_2(t)$, $x_4(t)$, $\tilde{\tau}_1(t)$, $\tilde{\tau}_2(t)$ отслеживают ограниченные всюду сигмоидальные сигналы (2.1), амплитуда которых не превосходит верхних границ в проектных ограничениях. Однако при выбранных на основе указанной процедуры параметрах регулятора в замкнутой системе гарантируется тотальное выполнение проектных ограничений при $t \geq 0$ только на управления $u_i(t)$, $i = 1, 2$ в силу постоянных амплитуд (4.11) и на моменты $\tilde{\tau}_i(t)$, $i = 1, 2$, поскольку для невязок $e_{3i}(t)$ с помощью разрывного управления обеспечиваются монотонные переходные процессы. Для невязок $e_{2i}(t)$ монотонные переходные процессы в рамках данной процедуры не гарантированы, поэтому по угловым скоростям $x_2(t)$, $x_4(t)$, в общем случае,

вначале переходного процесса возможно незначительное нарушение заданных диапазонов (что требует, по возможности, снижения амплитуд m_{11}, m_{12} на этапе синтеза). Но, как будет показано в разделе 4.4, величина перерегулирования будет заведомо меньше всплесков, характерных для замкнутых систем с линейными локальными связями, функционирующих в условиях неопределенности.

4.3. Наблюдатель угловых скоростей

Обратная связь (4.11) осуществляется по невязкам $e_{3i}, i=1,2$. В данном случае нельзя воспользоваться наблюдателем для непосредственного оценивания сигналов $e_{3i}(t)$ [14], так как преобразованная система (4.10) ненаблюдаема относительно выхода из-за наличия в первых двух уравнениях внешних возмущений. Поэтому переменные $e_{3i}, i=1,2$, которые являются функциями от ошибок слежения, угловых скоростей и моментов (4.9), будем вычислять в реальном времени по имеющимся измерениям $x_1(t), x_3(t), \tilde{\tau}_i(t)$ и $g_i(t), i=1,2$. Кроме того, для управления потребуются текущие значения угловых скоростей $x_2(t), x_4(t)$.

Для удобства дальнейших построений введем следующие обозначения: $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12})$ – вектор угловых положений, где $q_{11} = x_1, q_{12} = x_3$; $q_2 = \text{col}(q_{21}, q_{22})$ – вектор угловых скоростей, где $q_{21} = x_2, q_{22} = x_4$, на которые вместе с их производными в силу (4.1), (4.5) имеются следующие оценки:

$$\begin{aligned} |q_{21}(t)| \leq Q_{21} = X_{21}, \quad |q_{22}(t)| \leq Q_{22} = X_{22}, \\ |\dot{q}_{21}(t)| \leq Q_{31} = 1/I_{1,\min} \cdot [\xi_{\max} \tilde{T}_1 + F_1], \quad |\dot{q}_{22}(t)| \leq Q_{32} = 1/I_{2,\min} \cdot [\tilde{T}_2 + F_2]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Таким образом, с учетом новых обозначений цель заключается в получении оценок угловых скоростей $q_{2i}, i=1,2$, необходимых для реализации закона управления (4.11). Получить данные оценки можно за счет численного дифференцирования имеющихся измерений $q_{1i}, i=1,2$. Однако операций реального дифференцирования сигналов, которые приводят к возбуждению

помех и появлению запаздывания, стараются избегать на практике. Для оценивания угловых скоростей по измерениям угловых положений предлагается ввести наблюдатель состояния пониженного порядка, который строится на основе кинематических соотношений механической подсистемы (4.1)

$$\dot{q}_1 = q_2,$$

и имеет вид

$$\dot{z} = \nu, \quad (4.31)$$

где $z = \text{col}(z_1, z_2) \in R^2$ – вектор состояния, $\nu = P\sigma(L\varepsilon)$ – вектор сигмоидальных корректирующих воздействий наблюдателя, $\varepsilon = q_1 - z \in R^2$ – вектор ошибок наблюдения, $P = \text{diag}(p_i)$, $L = \text{diag}(l_i)$, $p_i = \text{const} > 0$, $l_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$, $\sigma(L\varepsilon) = \text{col}(\sigma(l_1\varepsilon_1), \sigma(l_2\varepsilon_2))$.

Задача наблюдения сводится к стабилизации ошибок наблюдения и их производных и решается на основе виртуальной системы

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= q_2 - \nu = q_2 - P\sigma(L\varepsilon), \\ \ddot{\varepsilon} &= \dot{q}_2 - P \frac{\partial \sigma(L\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где $\frac{\partial \sigma(L\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \text{diag}\left(\frac{\partial \sigma(l_i\varepsilon_i)}{\partial \varepsilon_i}\right)$, $i = 1, 2$. В отличие от стандартных редуцированных наблюдателей, где отбрасывается динамика измеряемых переменных, здесь, наоборот, отбрасывается динамика неизменяемых переменных $q_2(t)$, которые в системе (4.32) трактуются как внешние, ограниченные возмущения с ограниченной производной (4.30).

Зададимся точностью стабилизации ошибки наблюдения $\delta_{1i} = \text{const} > 0$ вместе с ее производной $\delta_{2i} = \text{const} > 0$:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i(t)| \leq \delta_{1i}, \quad |\dot{\varepsilon}_i(t)| = |q_{2i}(t) - \nu_i(t)| \leq \delta_{2i} \Rightarrow \nu_i(t) = q_{2i}(t) \pm \delta_{2i}, \\ t > t_{0i}, \quad 0 < t_{0i} < t_{1i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Требования к процессу оценивания (4.33) достигаются выбором параметров корректирующих воздействий. Аналогично достаточным условиям (2.12), (2.28), выбор параметров

$$\begin{aligned} p_i &> 1,25Q_{2i}, \\ l_i &> \max \left\{ \frac{2,2}{\delta_{1i}}, \frac{5,56Q_{3i}}{p_i\delta_{2i}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

обеспечивает сходимость ошибки наблюдения в область $|\varepsilon_i(t)| \leq \delta_{1i}$, $i=1,2$ при $|\varepsilon_i(0)| > \delta_{1i}$ без учета времени t_{0i} или гарантирует, что ошибка наблюдения не покинет указанную область при $|\varepsilon_i(0)| \leq \delta_{1i}$. Тот факт, что переменные $q_1(t)$ непосредственно измеряются, позволяет обеспечить

$$z_i(0) = q_{1i}(0) \Rightarrow \varepsilon_i(0) = 0 \Rightarrow |\varepsilon_i(t)| \leq \delta_{1i}, t \geq 0, i=1,2. \quad (4.35)$$

Аналогично (2.32), решение задачи оценивания за заданное время t_{0i} (4.33) достигается при выборе (4.35) и следующих параметров корректирующих воздействий

$$\begin{aligned} p_i &> 1,25Q_{2i}, \\ l_i &> \max \left\{ \frac{2,2}{\delta_{1i}}; \frac{5,56Q_{3i}}{p_i(\delta_{2i} - \alpha_i)}; \frac{5,56}{p_i t_{0i}} \ln \frac{Q_{2i} + 0,8p_i}{\alpha_i} \right\}, 0 < \alpha_i < \delta_{2i}, i=1,2. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Из (4.36) также можно получить зависимость времени оценивания t_{0i} от параметров наблюдателя l_i и p_i :

$$t_{0i} \leq \frac{5,56}{p_i l_i} \ln \frac{Q_{2i} + 0,8p_i}{\alpha_i}, i=1,2. \quad (4.37)$$

Как видно из (4.37), с ростом l_i сокращается не только ошибка оценивания $|\varepsilon_i(t)| \leq 2,2/l_i$, но и время оценивания t_{0i} , оно может быть обеспечено сколь угодно малым. Отметим, что ограничения на значения l_i и p_i связаны только с разрядностью вычислительной системы, поскольку наблюдатель состояния (4.31) полностью реализуется в ней и не является физическим объектом. Существенно, что рост параметров l_i в

сигмоидальных корректирующих воздействиях не приводит к всплескам оценочных сигналов, характерным для наблюдателей с глубокими линейными обратными связями [106]. По сравнению с наблюдателем состояния с разрывными корректирующими воздействиями, где для получения искомых оценок необходимо отфильтровать высокочастотную составляющую сигнала за счет использования фильтра нижних частот, построенный наблюдатель (4.31) с сигмоидальными корректирующими воздействиями позволяет снизить вычислительную сложность системы и обеспечить лучшее качество оцениваемых сигналов (гладкость). Стоит отметить, что недостатком наблюдателя (4.31) является потеря работоспособности при наличии шумов в измерениях. В этом случае для его использования необходима предварительная фильтрация шумов, например, с помощью фильтра Калмана. Построенный наблюдатель (4.31) с сигмоидальными корректирующими воздействиями был также апробирован в работах [11, 12, 108, 31].

Тогда параметры корректирующих воздействий наблюдателя могут быть приняты из условий (4.34) без учета времени оценивания или (4.36) с его учетом, что гарантирует (4.33). При этом оценки угловых скоростей с заданной точностью δ_{2i} предоставляют корректирующие воздействия (4.33).

Таким образом, текущие значения невязок (4.9) вычисляются на основе измеряемых и восстановленных сигналов:

$$\begin{aligned}\hat{e}_{2i}(t) &= v_i(t) + m_{1i}\sigma(k_{1i}e_{1i}(t)), \\ \hat{e}_{3i}(t) &= \tilde{v}_i(t) + m_{2i}\sigma(k_{2i}\hat{e}_{2i}(t)), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{4.38}$$

При этом базовый закон управления (4.11) реализуется в виде

$$u_i = -m_{3i}\text{sign}(\hat{e}_{3i}), \quad i = 1, 2,\tag{4.39}$$

что с учетом (4.33) порождает реальный скользящий режим в малом пограничном слое поверхностей переключения.

Следует отметить, что с учетом точности оценивания угловых скоростей (4.35) и, соответственно, невязок e_{2i} , для достижения заданной

точности $\Delta_{2i}^* = \text{const} > 0$: $|e_{2i}(t)| \leq \Delta_{2i}^*$ в (4.13) необходимо принять $\Delta_{2i} = \Delta_{2i}^* - \delta_{2i}$, откуда также следует $\delta_{2i} < \Delta_{2i}^*$, $i = 1, 2$, что накладывает требования на точность оценивания.

4.4. Результаты моделирования

С целью верификации разработанного метода синтеза динамической обратной связи было проведено численное моделирование в среде MATLAB-Simulink. В электромеханической системе (4.1)–(4.3) были приняты следующие значения параметров [136]:

$$\begin{aligned} I_1 &= 6,8 \cdot 10^{-2} \text{ [кг} \cdot \text{м}^2], I_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ [кг} \cdot \text{м}^2], \\ K_{gy} &= 0,05 \text{ [с/рад]}, M_g = 0,32 \text{ [Н} \cdot \text{м]}, \\ B_{1\psi} &= 6 \cdot 10^{-3} \text{ [Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с/рад]}, B_{2\psi} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ [Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2/\text{рад]}, \\ B_{1\varphi} &= 1 \cdot 10^{-1} \text{ [Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с/рад]}, B_{2\varphi} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ [Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2/\text{рад]}, \\ k_c &= 0,2, T_0 = 3,5, T_{10} = 1, T_{11} = 1,1, T_p = 2, k_1 = 1,1, T_{20} = 1, T_{21} = 1, \\ k_2 &= 1, a_1 = 0,0135, b_1 = 0,55, a_2 = 0,02, b_2 = 0,58. \end{aligned}$$

Внешние возмущения описывались следующими периодическими функциями с главным периодом 4 [с]:

$$\eta_1 = \begin{cases} 0,02, & 0 \leq t \leq 2, \\ -0,02, & 2 < t \leq 4, \end{cases} \quad \eta_2 = \begin{cases} -0,02, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0,02, & 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Требовалось обеспечить отслеживание угловыми координатами x_1 и x_3 заданных сигналов

$$g_1(t) = 0,15 \cos t, \quad g_2(t) = 0,1 \sin(2t) + 0,1 \cos(t) + 0,2$$

из нулевых начальных значений

$$x_i(0) = 0, \quad i = 1, 5, \quad \tau_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

с заданной точностью $\Delta_{11} = \Delta_{12} = 0,05$ в установившемся режиме при наличии следующих ограничений:

$$\begin{aligned} |x_2(t)| &\leq 0,4 \text{ [рад/с]}, \quad |x_4(t)| \leq 0,4 \text{ [рад/с]}, \\ |\tilde{\tau}_i(t)| &\leq 0,2 \text{ [Н} \cdot \text{м]}, \quad |u_i(t)| \leq 2,5 \text{ [В]}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

На основе неравенств (4.21)–(4.25) были выбраны параметры фиктивных и истинных управлений:

$$k_{1i} = 60, k_{21} = 13,86, k_{22} = 23,10,$$

$$m_{11} = 0,18, m_{12} = 0,34, m_{2i} = 0,15, m_{3i} = 2,5, i = 1,2,$$

а на основе неравенств (4.34) и заданной точности стабилизации ошибки наблюдения и оценки угловых скоростей $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 0,01, i = 1,2$ – следующие параметры наблюдателя состояния (4.31), а также его начальные условия:

$$l_i = 60, p_i = 11,$$

$$z_i(0) = 0,01, i = 1,2.$$

Численное моделирование проводилось для замкнутой системы (4.1)–(4.3), (4.31), (4.38)–(4.39) с ограниченными сигмоидальными фиктивными управлениями (4.8). Также в целях сравнения было проведено моделирование для замкнутой системы с законом управления (4.39), но с классически используемыми неограниченными линейными фиктивными управлениями [40, 62, 135]. При этом невязки между реальными и принятыми линейными фиктивными управлениями, аналогичные (4.38), имеют вид

$$\hat{e}_{21} = v_1 + \kappa_{11}e_{11}, \hat{e}_{22} = v_2 + \kappa_{12}e_{12},$$

$$\hat{e}_{31} = \tilde{\tau}_1 + \kappa_{21}e_{21}, \hat{e}_{32} = \tilde{\tau}_2 + \kappa_{22}e_{22},$$

где большие коэффициенты $\kappa_{ji}, j=1,2, i=1,2$ были определены из достаточных условий так, чтобы обеспечить такую же точность, что и при выбранных параметрах сигмоидальных фиктивных управлений:

$$\kappa_{11} = 3,5, \kappa_{12} = 8, \kappa_{21} = 1,15, \kappa_{22} = 0,5.$$

Для численного интегрирования замкнутой системы использовался метод Эйлера с постоянным шагом $5 \cdot 10^{-4}$.

Результаты моделирования представлены для угла рыскания $x_3(t)$ (для угла тангажа $x_1(t)$ – схожие результаты). На рис. 4.2 приведены графики ошибки слежения $e_{12}(t)$ (пунктирными линиями обозначены границы заданных ошибок). На рис. 4.3 приведены графики ошибки оценивания

угловой скорости $x_4(t)$ с помощью наблюдателя (4.31). На рис. 4.4–4.5 представлены графики переменных состояния $x_4(t)$ и $\tilde{\tau}_2(t)$, на которые накладывались проектные ограничения (4.40), пунктирными линиями обозначены границы проектных ограничений.

В целях сравнительного анализа в таблице 4.1 представлены следующие показатели качества замкнутых систем с различными фиктивными управлениями: время переходного процесса t_p – момент времени, начиная с которого достигается желаемая точность 0,05 [рад], величина перерегулирования по e_{12} : $\Delta_{e_{12}} = \max |e_{12}(t)|$, достигнутая точность Δ_{12} в установившемся режиме для e_{12} , а также величины перерегулирования по переменным $x_4(t)$, $\tilde{\tau}_2(t)$.

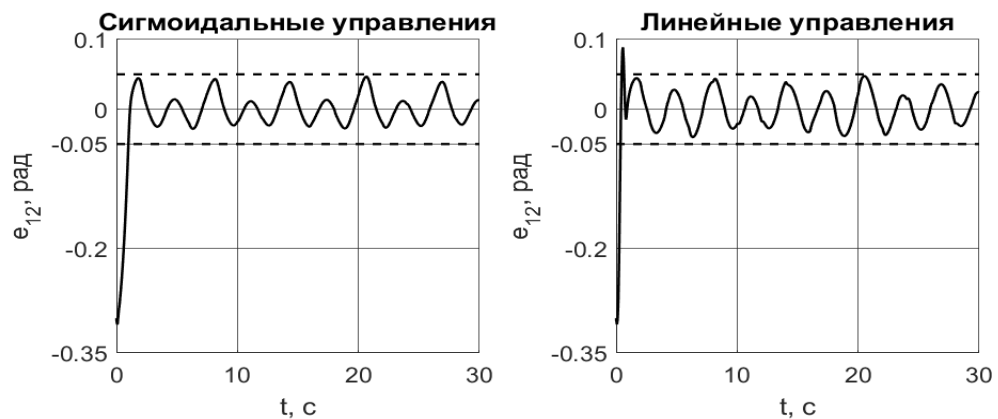


Рис. 4.2. Графики $e_{12}(t)$



Рис. 4.3. Графики $x_4(t) - v(t)$

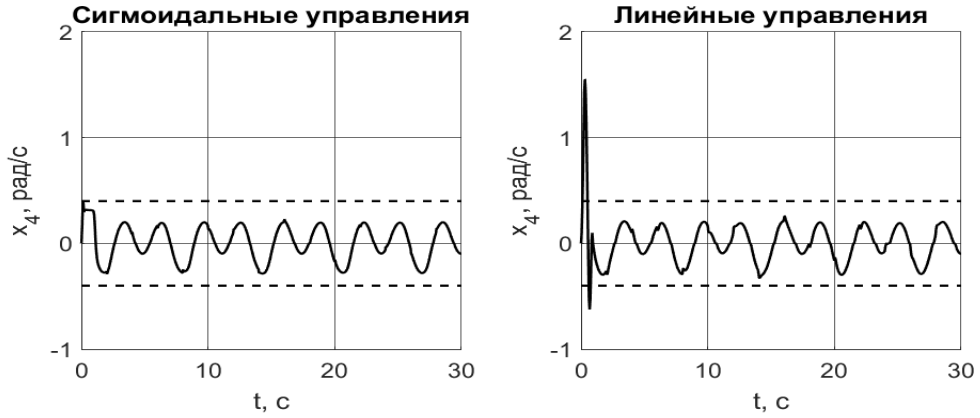
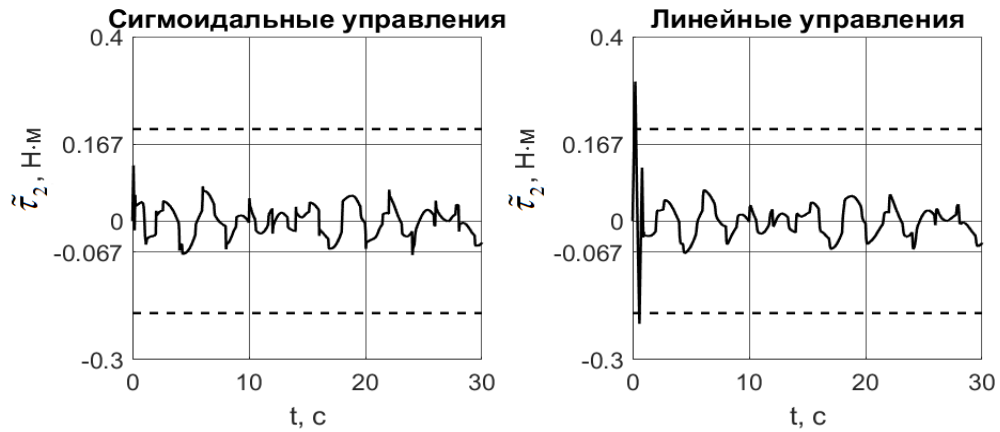
Рис. 4.4. Графики $x_4(t)$ Рис. 4.5. Графики $\tilde{z}_2(t)$

Таблица 4.1. Показатели качества с разными фиктивными управлениями

Фиктивные управления	$t_p, \text{с}$	$\Delta_{e_{12}}, \text{рад}$	$\Delta_{12}, \text{рад}$	$\Delta_{x_4}, \text{рад/с}$	$\Delta_{\tilde{z}_2}, \text{Н}\cdot\text{м}$
Сигмоидальные	0,9905	0,3090	0,0466	0,3932	0,1210
Линейные	0,6570	0,3090	0,0475	1,5497	0,3033

Таким образом, из рис. 4.2 и таблицы 4.1 видно, что заданная точность слежения достигается, и она примерно одинакова для алгоритмов с разными фиктивными управлениями. Из графиков рис. 4.3 видно, что ошибка оценивания угловой скорости с помощью корректирующего воздействия наблюдателя сходится в заданную окрестность менее чем за 0,1 [с]. Стоит отметить, что для алгоритма с сигмоидальными фиктивными управлениями удается выполнить заданные ограничения на переменные состояния (4.40)

благодаря выбору параметров фиктивных и истинных управлений, в то время как для алгоритма с линейными фиктивными управлениями ограничения не выполняются (см. рис. 4.4–4.5). Из таблицы 4.1 следует, что для системы с линейными фиктивными управлениями время регулирования оказывается в 1,5 раза меньше, однако величина перерегулирования по контрольным переменным в 2,5 – 4 раза больше по сравнению с системой с сигмоидальными фиктивными управлениями. Последний факт позволит на практике использовать приводы меньшей мощности.

4.5. Выводы к главе 4

В данной главе рассматривалась проблема синтеза системы слежения для TRMS при действии параметрических и внешних возмущений, наличии ограничений на переменные состояния и управления, а также при неполных измерениях. Поставленная цель была достигнута за счет использования блочного подхода с формированием сигмоидальных фиктивных управлений, обеспечивающих инвариантность по отношению к возмущениям с заданной точностью и выполнение проектных ограничений. Оценки неизмеряемых угловых скоростей были получены с помощью наблюдателя пониженного порядка (4.31), не требующего параметрической определенности объекта управления и ввода динамической модели внешних возмущений. На основе результатов моделирования показано, что по сравнению с системой с линейными фиктивными управлениями, при использовании сигмоидальных управлений удастся снизить величину перерегулирования в 2,5 – 4 раза. Однако в рамках разработанной процедуры, в общем случае, не гарантируется тотальное выполнение ограничений по угловым скоростям в начале переходных процессов. Для их обеспечения потребуется уточнение процедуры настройки параметров регулятора с учетом области допустимых начальных условий и оценкой времени переходных процессов, что составит предмет дальнейших исследований.

Глава 5. Стабилизация заданного положения ходовой тележки однобалочного мостового крана

В данной главе в качестве объекта управления рассматривается однобалочный мостовой кран (ОМК), способный перемещать закрепленный на ходовой тележке груз. Особенность объекта заключается в наличии одного управляющего воздействия и двух степеней свободы (система с недостатком управляющих воздействий, в зарубежной литературе «underactuated system»), присутствии в модели параметрических неопределенностей.

В разделе 5.1 формализована постановка задачи стабилизации заданного положения тележки Омк. В разделе 5.2 на основе свойства пассивности системы построен базовый закон управления, включающий линейную и сигмоидальную части. Для информационного обеспечения данного закона синтезирован наблюдатель состояния пониженного порядка с сигмоидальным корректирующим воздействием. В разделе 5.3 представлены характеристики и результаты апробации разработанных алгоритмов для промышленного крана СХТС10-ТОН. Проведено сравнение с ПД-регулятором. Результаты данной главы опубликованы в [11].

5.1. Модель объекта управления. Постановка задачи

ОМК состоит из главной балки, соединенной с двумя концевыми ходовыми тележками, которые крепятся на опорные рельсы. Вся конструкция образует мост. Грузоподъемную функцию в мостовом кране выполняет тележка массой M , к которой на стержне длиной l крепится груз с массой m (см. рис. 5.1). Тележка может совершать горизонтальные перемещения под действием управляющей силы u , создаваемой электродвигателем. Для описания ее движения вводятся следующие обобщенные координаты: q_{11} – горизонтальное перемещение тележки; q_{12} – угол отклонения стержня от вертикальной оси.

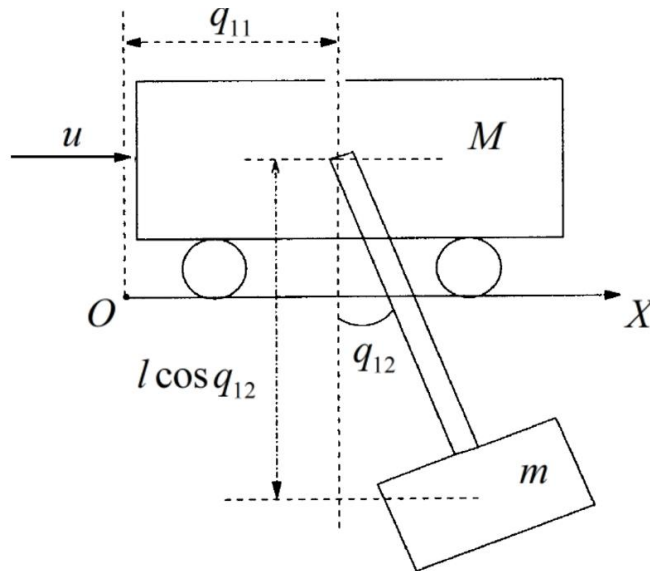


Рис. 5.1. Схема ходовой тележки ОМК

Математическая модель объекта управления имеет вид [121]:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= f_1(q_1, q_2) + f_2(q_1, q_2)(u + \eta(t)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12}) \in R^2$ – вектор обобщенных координат,
 $q_2 = \text{col}(q_{21}, q_{22}) \in R^2$ – вектор обобщенных скоростей,

$$f_1(q_1, q_2) = \text{col}(f_{11}, f_{12}) \in R^2, \quad f_2(q_1, q_2) = \text{col}(f_{21}, f_{22}) \in R^2,$$

$$f_{11} = \frac{1}{M + m \sin^2(q_{12})} [-m \sin q_{12} (l q_{22}^2 + g \cos q_{12})],$$

$$f_{12} = \frac{1}{l(M + m \sin^2(q_{12}))} [-\sin q_{12} ((M + m)g + ml \cos q_{12} \cdot q_{22}^2)],$$

$$f_{21} = \frac{1}{M + m \sin^2(q_{12})}, \quad f_{22} = \frac{\cos q_{12}}{l(M + m \sin^2(q_{12}))},$$

g – ускорение свободного падения, $\eta(t)$ – обобщенная сила, трактуемая как неизвестное ограниченное возмущение. Выдвигаются следующие предположения:

1) $\eta(t)$ полагается кусочно-гладкой ограниченной функцией с ограниченными односторонними производными, $|\eta(t)| \leq H$, $|\dot{\eta}(t)| \leq H_1$, $t \geq 0$,

H, H_1 – известные константы;

2) параметры l, m, M точно не известны;

3) груз рассматривается как точечная масса, жесткость и масса стержня не учитываются;

4) измерению подлежит только положение тележки ОМК $q_{11}(t)$, шумы измерений отсутствуют.

Ставится задача синтеза закона управления u в форме обратной связи, обеспечивающего заданное положение тележки ОМК $q_{11d} = \text{const}$ и стабилизацию остальных переменных состояния. В условиях неопределенности данная задача может быть решена с заданной точностью:

$$|e_{11}(t)| \leq \Delta_{11}, |q_{21}(t)| \leq \Delta_{21}, t > T > 0, \quad (5.2)$$

где $e_{11} = q_{11} - q_{11d}$ – ошибка регулирования.

Следует отметить, что применительно к электромеханическому объекту и механической подсистеме управление u является фиктивным управлением, а для электрической подсистемы его сформированное значение будет являться задающим воздействием. Задача его отслеживания за счет выбора истинного управления аналогична алгоритму, представленному в разделе 3.5, и в данной главе не рассматривается.

5.2. Синтез закона управления

Для решения поставленной задачи (5.2) предлагается использовать комбинированный закон управления [11]

$$u = -k_1 e_{11} - M_2 \sigma(k_2 q_{21}), \quad (5.3)$$

$k_2, M_2 = \text{const} > 0$, $\sigma(k_2 q_{21})$ – сигма-функция от указанного аргумента (2.1).

Данный закон состоит из двух частей – линейной и сигмоидальной. Линейная часть служит для стабилизации ошибки регулирования e_{11} , скорость сходимости зависит от выбора $k_1 > 0$, а нелинейная (сигмоидальная) – для обеспечения инвариантности по отношению к внешнему возмущению [11, 12, 13, 31, 108].

Для выбора параметров закона управления (5.3) и исследования устойчивости замкнутой системы (5.1), (5.3) в качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим [97, 121]

$$V(q_1, q_2) = E(q_1, q_2) + \frac{1}{2} k_1 e_{11}^2, \quad (5.4)$$

где $E(q_1, q_2) = \frac{1}{2} q_2^T I(q_1) q_2 + mgl(1 - \cos q_{12})$ – полная энергия системы с матрицей инерции

$$I(q_1) = \begin{pmatrix} M + m & -ml \cos q_{12} \\ -ml \cos q_{12} & ml^2 \end{pmatrix}.$$

С учетом (5.1), (5.3) производная функции (5.4) имеет вид

$$\dot{V} = q_{21}(u + \eta + k_1 e_{11}) = q_{21}(\eta - M_2 \sigma(k_2 q_{21})). \quad (5.5)$$

Вне окрестности $|q_{21}(t)| \leq 2,2 / k_2$ в силу (2.19) справедливы следующие оценки:

$$\dot{V} \leq |q_{21}|(H - 0,8M_2) < 0 \Rightarrow M_2 > 1,25H. \quad (5.6)$$

При выборе параметра M_2 в указанном виде (5.6) за конечное время $t_1 > 0$ в замкнутой системе (5.1), (5.3) обеспечивается сходимость переменных $e_{11}(t), q_{21}(t), q_{12}(t), q_{22}(t)$ в некоторые окрестности нуля. Параметр k_2 который играет роль большого коэффициента, выбирается исходя из заданной точности (5.2) в силу (2.19) на основе следующих соотношений:

$$|q_{21}| \leq \Delta_{21} = 2,2 / k_2, |\eta - M_2 \sigma(k_2 q_{21})| \leq \beta = 5,56H_1 / (M_2 k_2), |e_{11}| \leq \Delta_{11} = \beta / k_1 \Rightarrow$$

$$k_2 > \max \left\{ \frac{2,2}{\Delta_{21}}; \frac{5,56H_1}{M_2 \Delta_{11} k_1} \right\}. \quad (5.7)$$

Разработанный базовый закон управления (5.3) зависит от переменных $e_{11} = q_{11} - q_{11d}$ и q_{21} . Для его реализации необходимо получить оценку скорости тележки ОМК $q_{21}(t)$ по имеющимся измерениям положения $q_{11}(t)$. Для получения данной оценки на основе подсистемы $\dot{q}_{11} = q_{21}$, где переменная $q_{21}(t)$ трактуется как внешнее ограниченное возмущение с

ограниченной производной $|q_{21}(t)| \leq \bar{q}_{21}, |\dot{q}_{21}(t)| \leq \bar{q}_{31}, t \geq 0$, строится наблюдатель состояния, который аналогичен (4.31) и имеет первый порядок:

$$\dot{z}_{11} = v, \quad (5.8)$$

где $z_{11} \in R$ – переменная состояния, $v = U\sigma(k\varepsilon)$ – сигмоидальное корректирующее воздействие наблюдателя, $\varepsilon = q_{11} - z_{11} \in R$ – ошибка наблюдения. Выбор начальных условий $z_{11}(0) = q_{11}(0)$ обеспечивает $\varepsilon(0) = q_{11}(0) - z_{11}(0) = 0$.

При заданной точности стабилизации ошибки наблюдения $\delta_1 = \text{const} > 0$ и точности оценивания $\delta_2 = \text{const} > 0$:

$$|\varepsilon(t)| \leq \delta_1, \quad |q_{21}(t) - v(t)| \leq \delta_2, \quad t \geq t_0, \quad (5.9)$$

параметры корректирующего воздействия выбираются аналогично (2.12), (2.28)

$$U > 1,25\bar{q}_{21},$$

$$k > \max \left\{ \frac{2,2}{\delta_1}, \frac{5,56\bar{q}_{31}}{U\delta_2} \right\}, \quad (5.10)$$

без учета заданного времени оценивания t_0 или аналогично (2.32) с его учетом:

$$U > 1,25\bar{q}_{21},$$

$$k > \max \left\{ \frac{2,2}{\delta_1}, \frac{5,56\bar{q}_{31}}{U(\delta_2 - \alpha)}, \frac{5,56}{Ut_0} \ln \frac{\bar{q}_{21} + 0,8U}{\alpha} \right\}, \quad 0 < \alpha < \delta_2.$$

Тогда, в замкнутой системе (5.1) с наблюдателем состояния (5.8) закон управления (5.3) реализуется в виде:

$$u = -k_1 e_{11} - M_2 \sigma(k_2 v), \quad (5.11)$$

и обеспечивает решение поставленной задачи (5.2).

Следует отметить, что при выборе параметров регулятора в силу (5.9) необходимо учесть

$$|q_{21}(t)| \leq \frac{2,2}{k_2} + \delta_2, \quad t \geq t_0,$$

что немного увеличивает размер области сходимости переменной q_{21} по сравнению с (5.2).

5.3. Апробация разработанных алгоритмов для промышленного крана CXTS10-TON

Разработанные алгоритмы приняты к испытаниям ООО «Меридиан» на однобалочных мостовых кранах типа CXTS10-TON, используемых для транспортировки груза на складском логистическом комплексе в Астраханской области (Черноярский район, с. Солодники), что подтверждается актом о внедрении результатов диссертационной работы (см. Приложение). На рис. 5.2 приведен кран данного типа, а в таблице 5.1 представлены его характеристики.

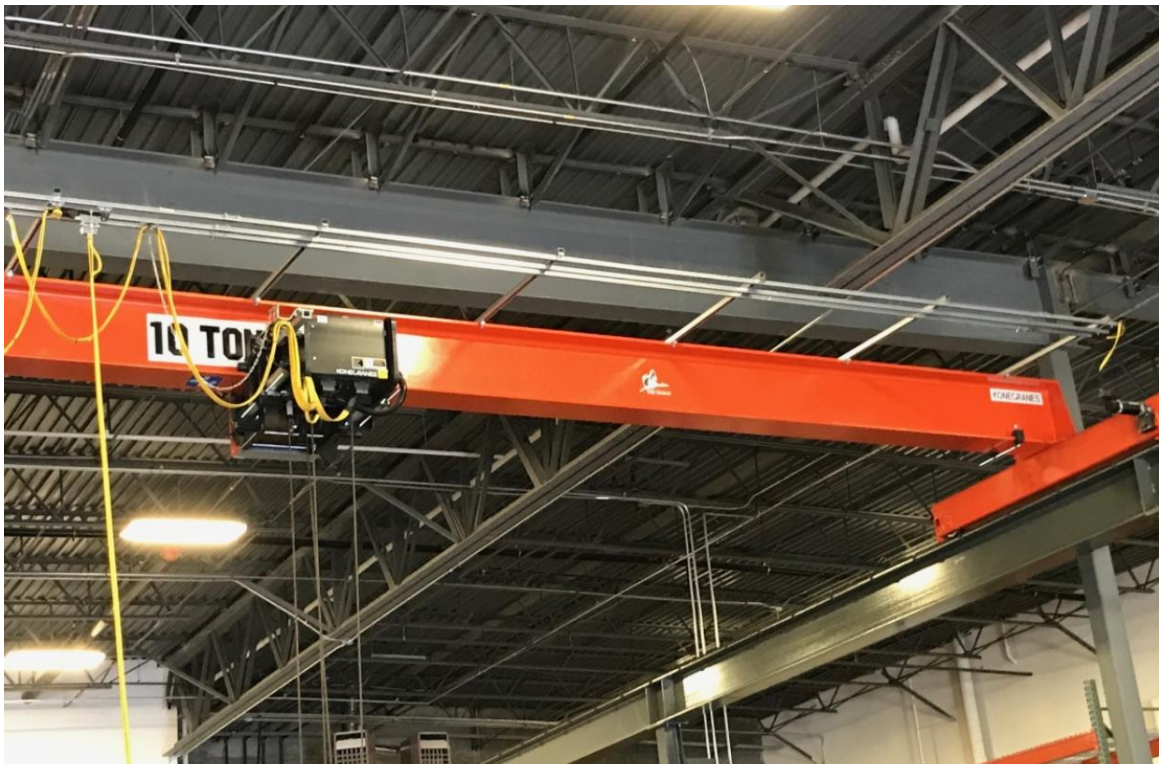


Рис. 5.2. Кран типа CXTS10-TON

Таблица 5.1. Характеристики крана СХТС10-TON

Характеристика	Значение, единица измерения
Общая масса крана	4830,76 [кг]
Масса главной балки	2957,42 [кг]
Масса тележки	612,35 [кг]
Длина пролета	13,41 [м]
Длина стержня	6 [м]
Расчетный срок службы подшипников	128640 [ч]

ООО «Меридиан» – транспортная компания, имеющая овощные склады и склады удобрений в Астраханской области. Однобалочный мостовой кран СХТС10-TON используется для работы на данном складском-логистическом комплексе, он способен перемещать грузы весом до 9071,84 [кг]. Его основные функции состоят в проведении погрузочных и разгрузочных работ. Для данного крана, как и для всех мостовых кранов, особо актуальной проблемой является снижение амплитуды колебаний груза во время его переноса. Актуальность обусловлена тем, что эти колебания могут привести к серьезным повреждениям груза, окружающей среды и обслуживающего персонала, особенно при переносе массивных объектов. Чтобы избежать данных проблем, в комбинированный закон управления (5.11) была введена сигмоидальная часть, которая за счет своих параметров – большого коэффициента k_2 и амплитуды M_2 предоставляет гибкий инструмент регулирования скорости крана, в то время как классическая линейная часть с коэффициентом пропорциональности k_1 регулирует его положение.

Для проверки эффективности разработанного комбинированного закона управления (5.11) применительно к крану СХТС10-TON было проведено численное моделирование в системе MATLAB-Simulink для его

характеристик $M = 612,35$ [кг], $l = 6$ [м] из табл. 5.1. Требовалось решить типовую задачу для данного крана – переместить груз из положения $q_{1i}(0) = 0, q_{2i}(0) = 0, i = 1, 2$, которое соответствовало началу пролета, в положение $q_{11d} = 13,31$ [м] – конец пролета с точностью $0,1$ [м]. Внешние возмущения описывались кусочно-гладкой периодической функцией $\eta(t) = 0,2t$ [Н] с главным периодом $T = 1$ [с].

Для достижения цели управления из (5.6), (5.7) и исходя из предельной допустимой массы груза $m = 9071,84$ [кг] были приняты параметры

$$k_1 = 20, k_2 = 10, M_2 = 200 \quad (5.12)$$

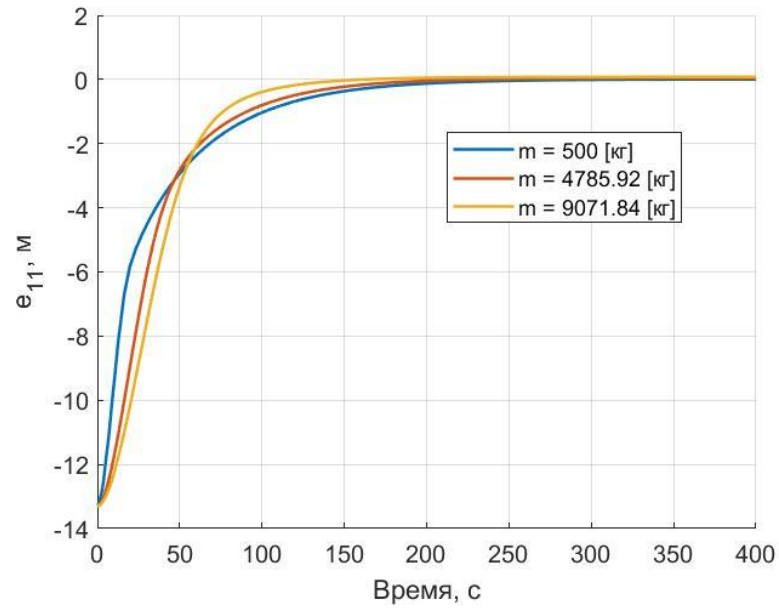
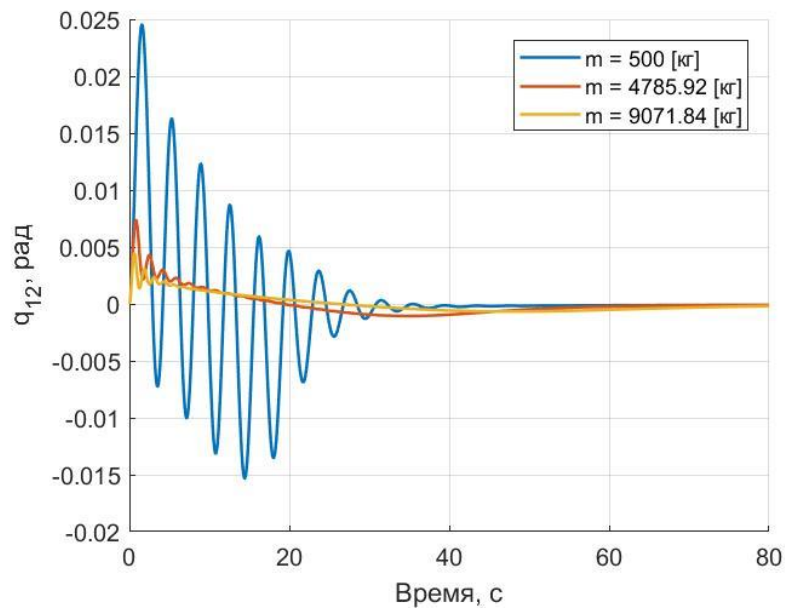
в комбинированном законе управления (5.3), а также с учетом (5.10) – параметры наблюдателя пониженного порядка с сигмоидальным корректирующим воздействием (5.8) в виде

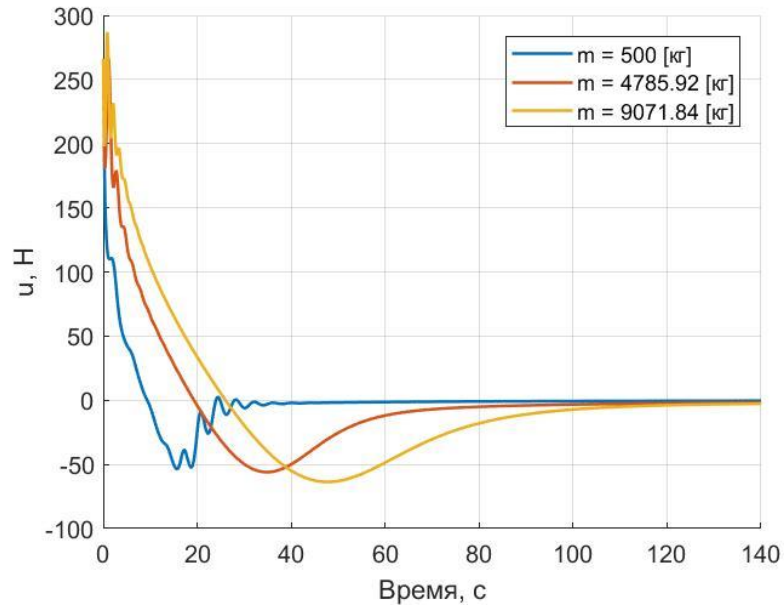
$$k = 250, U = 5 \quad (5.13)$$

для обеспечения точности $\delta_1 = 0,01$ [м], $\delta_2 = 0,01$ [м/с] и при начальных условиях $z_{11}(0) = q_{11}(0) = 0$. Численное интегрирование замкнутой системы проводилось методом Эйлера с постоянным шагом 10^{-3} .

Масса грузов, используемых для погрузочных и разгрузочных работ на складском-логистическом комплексе ООО «Меридиан», варьируется в пределах от 500 до 9071,84 [кг]. Было проведено 3 эксперимента с массами груза 500, 4785,92 и 9071,84 [кг] соответственно. Во всех экспериментах коэффициенты регулятора и наблюдателя были фиксированы (5.12), (5.13) и соответствовали предельной допустимой массе груза 9071,84 [кг].

Для всех экспериментов на рис. 5.7, 5.8 представлены графики ошибок регулирования заданного положения $e_{11}(t) = q_{11}(t) - q_{11d}$ и угла отклонения стержня от вертикальной оси $q_{12}(t)$, полученные по результатам моделирования системы, замкнутой комбинированным законом управления (5.11). На рис. 5.9 приведен график управляющей силы $u(t)$.

Рис. 5.3. График ошибки регулирования $e_{11}(t)$ Рис. 5.4. График угла отклонения стержня от вертикальной оси $q_{12}(t)$

Рис. 5.5. График управления $u(t)$

Таким образом, из рис. 5.3–5.5 следует, что разработанный комбинированный закон управления обеспечивает цель управления: заданная точность регулирования 0,1 [м] достигается при различных допустимых массах груза, переносимого краном СХТС10-TON, без перенастройки коэффициентов регулятора.

В табл. 5.2 приведены следующие показатели качества регулирования: время регулирования t_* : $|e_{11}(t)| \leq 0,1$, $t \geq t_*$; максимальное по модулю отклонение ошибки слежения от начального условия $e_{11,\max}$: $e_{11,\max} \geq |e_{11}(t) - e_{11}(0)|$, $t \geq 0$, точность в установившемся режиме δ_{11}^* : $\delta_{11}^* \geq |e_{11}(t)|$, $t \geq 300$ [с], величина перерегулирования угла отклонения стержня от вертикальной оси $q_{12,\max}$: $q_{12,\max} \geq |q_{12}(t)|$, $t \geq 0$, максимальное значение управления u_{\max} : $u_{\max} \geq |u(t)|$, $t \geq 0$.

Таблица 5.2. Значения показателей качества регулирования

Масса груза	Показатель качества				
	t_* , с	$e_{11,\max}$, М	δ_{11}^* , м	$q_{12,\max}$, рад	u_{\max} , Н
500 [кг]	210,1580	13,3191	0,0091	0,0245	266,2000
4785,92 [кг]	177,4970	13,3540	0,0440	0,0074	266,6278
9071,84 [кг]	132,6010	13,3890	0,0790	0,0045	286,7161

Отметим, что во всех экспериментах обеспечивается практически монотонный переходный процесс для ошибки регулирования (рис. 5.3, табл. 5.2), а максимальная амплитуда колебаний груза составляет 0,0245 [рад] (табл. 5.2).

Для сравнения был также построен классический закон управления в виде ПД-регулятора [121]:

$$u = -k_{p1}e_{11} - k_{p2}q_{21}, \quad (5.14)$$

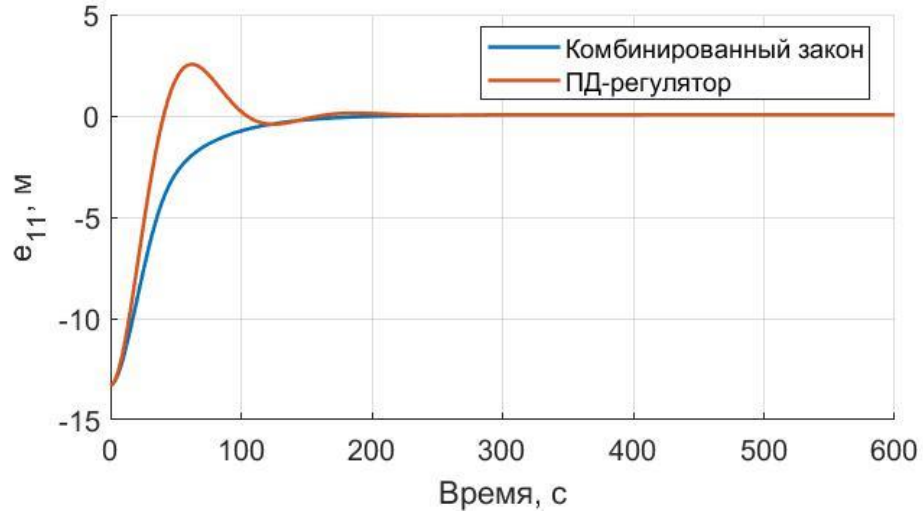
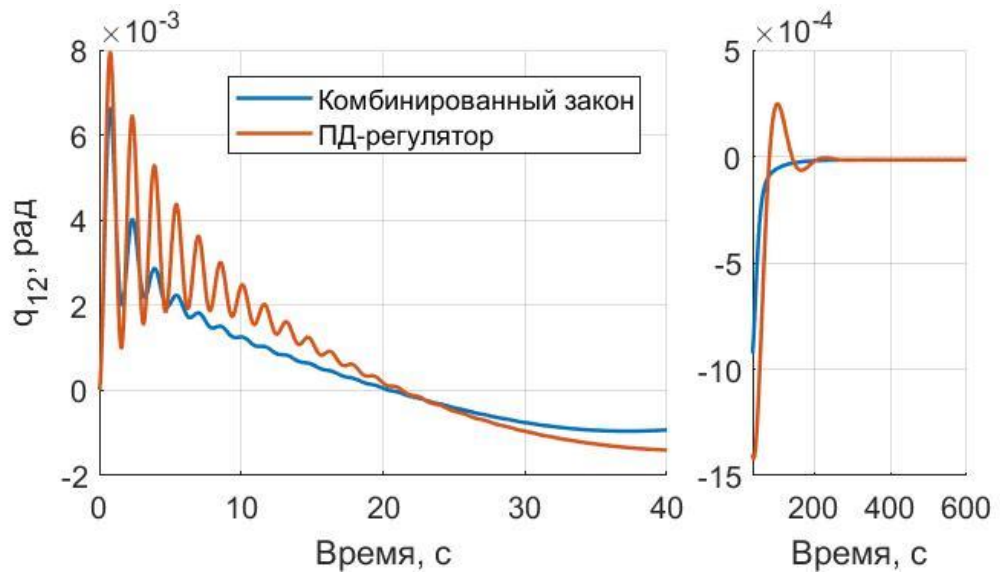
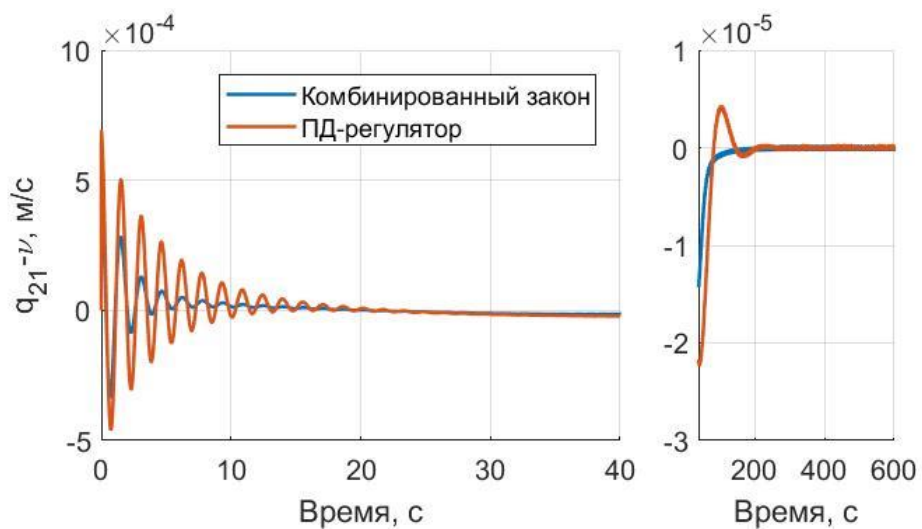
где параметры $k_{p1} = 20$, $k_{p2} = 330$ были приняты из аналогичных условиям (5.5)–(5.7) условий обеспечения заданной точности (5.2).

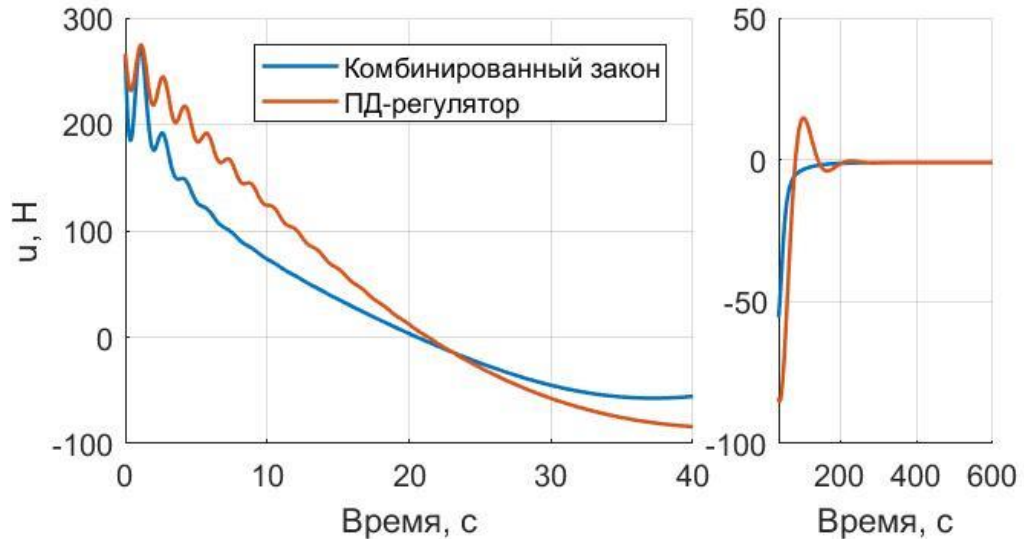
В замкнутой системе (5.1) с наблюдателем (5.8), (5.13) закон управления (5.14) реализуется следующим образом:

$$u = -k_{p1}e_{11} - k_{p2}v. \quad (5.15)$$

Был проведен эксперимент, в ходе которого для груза массой $m = 5500$ [кг] моделировались замкнутые системы с комбинированным законом управления (5.3) и с законом управления в виде ПД-регулятора (5.15).

На рис. 5.6, 5.7 для замкнутых систем представлены графики ошибок регулирования заданного положения $e_{11}(t) = q_{11}(t) - q_{11d}$ и угла отклонения стержня от вертикальной оси $q_{12}(t)$ соответственно. На рис. 5.8 приведены графики ошибок оценивания скорости тележки ОМК $q_{21}(t)$ с помощью корректирующего воздействия наблюдателя $v(t)$. На рис. 5.9 отражены графики управляющих воздействий $u(t)$.

Рис. 5.6. График ошибки регулирования $e_{11}(t)$ Рис. 5.7. График угла отклонения стержня от вертикальной оси $q_{12}(t)$ Рис. 5.8. График ошибки оценивания скорости $q_{21}(t) - v(t)$

Рис. 5.9. График управления $u(t)$

В табл. 5.3 отражены аналогичные показатели качества регулирования, что и в табл. 5.1.

Таблица 5.3. Значения показателей качества регулирования

Закон управления	Показатель качества				
	t_* , с	$e_{11,\max}$, м	δ_{11}^* , м	$q_{12,\max}$, рад	u_{\max} , Н
Комбинированный	171,3370	13,3599	0,0499	0,0066	272,3971
ПД-регулятор	206,7840	15,8516	0,0499	0,0080	274,6628

Таким образом, построенный комбинированный закон управления (5.3) стабилизировал заданное положение с требуемой точностью (рис. 5.6), а наблюдатель состояния (5.8) обеспечил его реализацию (рис. 5.8). По сравнению с ПД-регулятором, из рис. 5.8, 5.9 и табл. 5.3 следует, что благодаря использованию ограниченной сигмоидальной функции, комбинированный закон управления обеспечивает близкий к монотонному переходный процесс по ошибке регулирования, а также примерно в 4 раза меньшую величину $q_{12}(t)$ (амплитуду колебаний груза) и амплитуду управляющего воздействия $u(t)$ в переходном процессе. При этом для

законов управления сопоставимы максимальные значения $q_{12}(t)$, $u(t)$, и достигается одинаковая точность за сходное время регулирования.

5.4. Выводы к главе 5

В данной главе решена задача стабилизации заданного положения ходовой тележки однобалочного мостового крана с неопределенными массо-инерционными характеристиками при действии кусочно-гладких ограниченных внешних возмущений в условиях измерений только положения тележки ОМК. Применительно к объекту управления с недостатком управляющих воздействий предложен новый закон управления, построенный на основе свойства пассивности системы и содержащий линейную и сигмоидальную части. Сигмоидальная часть была введена с целью обеспечения инвариантности по отношению к внешним возмущениям и уменьшения ресурсов управления в силу своей ограниченности. Для оценки скорости тележки ОМК по измерению ее положения использован наблюдатель состояния пониженного порядка с сигмоидальным корректирующим воздействием, который в отличие от стандартных наблюдателей полного порядка не требовал знания математической модели объекта управления и основывался на простом кинематическом соотношении.

Разработанные алгоритмы апробированы для системы управления с параметрами мостового крана CXTS10-TON. Результаты численного моделирования подтвердили их работоспособность. Показано, что в замкнутой системе обеспечивается заданная точность стабилизации, при этом благодаря использованию ограниченной сигмоидальной функции в переходном процессе перерегулирование и величина управляющей силы примерно в 4 раза меньше, чем в замкнутой системе с классически используемым ПД-регулятором.

Использование в контуре обратной связи разработанного редуцированного наблюдателя с сигмоидальной коррекцией позволит

отказаться от датчика скорости тележки или организовать аналитическое резервирование измерительной системы на случай его поломки, что повысит надежность системы. При этом сокращение амплитуды колебаний переносимого груза повысит безопасность процесса транспортировки.

Заключение

В диссертационной работе в рамках решения фундаментальной проблемы теории и практики автоматического управления – подавления воздействия на регулируемые переменные несогласованных возмущений – разработан метод блочного синтеза сигмоидальных обратных связей для систем общего вида и для конкретных мехатронных объектов управления с учетом их особенностей. Получены робастные и универсальные алгоритмы управления, обеспечивающие заданные характеристики процесса слежения при различных режимах работы и не требующие перенастройки при изменении условий эксплуатации и внешних факторов в допустимых пределах.

Получены следующие основные результаты.

1. Формализован новый тип гладких ограниченных сигмоидальных обратных связей и выбор их параметров. Данные обратные связи подавляют действие аддитивных несогласованных возмущений и сочетают преимущества линейных управлений с большими коэффициентами и разрывных управлений, но, в отличие от них, реализуемы в практических приложениях.

2. Разработана декомпозиционная процедура синтеза сигмоидальных обратных связей, обеспечивающая в нелинейных одноканальных объектах заданную точность стабилизации ошибки слежения за заданное время при действии внешних несогласованных возмущений.

3. Разработан метод синтеза редуцированного наблюдателя с сигмоидальными корректирующими воздействиями для оценивания обобщенных скоростей по измерениям обобщенных координат неопределенно заданных мехатронных систем.

4. Разработана иерархическая процедура настройки амплитуд сигмоидальных управлений с неопределенной матрицей. Решена задача отслеживания траекторий, заданных в системе координат конечной точки

робота-манипулятора с неопределенными массо-инерционными характеристиками.

5. Разработана процедура синтеза следящей системы с сигмоидальными обратными связями с учетом ограничений на переменные состояния и управления для двухроторной электромеханической системы с перекрестными связями, при наличии сухого трения и других несогласованных возмущений. Показано, что по сравнению с линейными фиктивными управлениями сигмоидальные локальные связи позволяют уменьшить величину перерегулирования переменных состояния.

6. Построен закон с линейной и сигмоидальной частью, решающий задачу стабилизации заданного положения ходовой тележки ОМК. Показано, что при действии внешних возмущений предложенный подход позволяет снизить амплитуду колебаний груза по сравнению с ПД-регулятором, что повышает надежность и безопасность процесса транспортировки.

Список литературы

1. Александров В.А., Паленов М.В., Шатов Д.В. Частотное адаптивное управление процессом бурения с контролируемым давлением // Проблемы управления. 2016. № 2. С. 41-48.
2. Александров А.Г., Паленов М.В. Самонастраивающийся ПИД/И регулятор // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 4-18.
3. Александров А.Г., Паленов М.В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 16-30.
4. Ананьевский И.М. Управление трехзвенным перевернутым маятником в окрестности положения равновесия // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, №. 2. С. 149-155.
5. Ананьевский И.М. Управление механическими системами с неопределенными параметрами посредством малых сил // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 77. Вып. 1. С. 161–178.
6. Ананьевский И.М., Решмин С.А. Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траекторий механических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 5. С. 25-32.
7. Ананьевский И.М., Ишханян Т.А. Управление платформой с осцилляторами в присутствии сухого трения // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 20–26.
8. Ананьевский И.М. Управление нелинейной колебательной системой четвертого порядка с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2001. Вып. 3. С. 3–15.
9. Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1. Методы // Автоматика и телемеханика. 2020. №9. С. 3–61.

10. Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 2. Приложения // Автоматика и телемеханика. 2020. № 10. С. 35–91.

11. Антипов А.С., Краснова С.А. Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20. № 10. С. 609–614.

12. Антипов А.С., Краснова С.А. Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. № 1. С. 3–20.

13. Антипов А.С., Краснова С.А. Управление двухроторным механизмом в условиях неполной информации // Информационные технологии и вычислительные системы. 2020. № 1. С. 65–75.

14. Антипов А.С., Краснов Д.В., Уткин А.В. Декомпозиционный синтез системы управления электромеханическими объектами в условиях неполной информации // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 530–548.

15. Ахобадзе А.Г., Краснова С.А. Решение задачи слежения в условиях неопределенности на основе совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости // Управление большими системами. Выпуск 24. М.: ИПУ РАН, 2009. С.34–80.

16. Бахтадзе Н.Н., Максимов Е.М., Максимова Н.Е. Интеллектуальные алгоритмы идентификации состояния энергообъектов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2011. №3. С. 45-50.

17. Бобцов А.А. Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом // Автоматика и телемеханика. 2003. № 6. Р. 104–113.

18. Бобцов А.А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // Автоматика и телемеханика. 2008. № 8. С. 25–32.

19. Виноградова М.С., Ткачев С.Б., Ткачева О.С. Применение наблюдателя в скользящем режиме при моделировании процесса антиангиогенной терапии // Математика и математическое моделирование. 2018. № 6. С. 52-71.

20. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.

21. Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. – М.: Мир, 1989. – 376 с.

22. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г., Макаров Д.А. Один алгоритм построения регуляторов для нелинейных систем с формальным малым параметром // ИТиВС. 2015. № 4. С. 35–44.

23. Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А., Уткин В.И. Принцип блочного управления // Автоматика и телемеханика. Ч. I. 1990. № 5. С. 3–13; Ч. II. 1990. № 6. С. 20–31.

24. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. М.: Наука. Физматлит, 1997. 352 с.

25. Живанович М.М., Лазаревич М.П. Применение принципа декомпозиции для стабилизации с заданной точностью номинального движения механической системы // Автоматика и телемеханика. 2012. № 12. С. 65–88.

26. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами: Учебник для вузов. – М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2004. – 480 с.

27. Зобова А.А. Обзор моделей распределенного сухого трения // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. № 2. С.194–206.

28. Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В., Уткин А.В. Два метода синтеза наблюдателей состояния и возмущений для беспилотного летательного аппарата // Проблемы управления. 2020. № 1. С. 3–16.

29. Кочетков С.А., Уткин В.А. Метод декомпозиции в задачах управления мобильными роботами // Автоматика и телемеханика. 2011. № 10. С. 87–103.

30. Кочетков С.А., Уткин В.А. Вихревые алгоритмы в задаче управления двигателем постоянного тока // Проблемы управления. 2014. №5. С. 20–27.

31. Краснова С.А., Антипов А.С. Иерархический синтез сигмоидальных обобщенных моментов манипулятора в условиях неопределенности // Проблемы управления. 2016. №4. С. 10–21.

32. Краснова С.А., Кузнецов С.И. Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных системах // Автоматика и телемеханика. 2005. №10. С. 54–69.

33. Краснова С.А., Мысик Н.С. Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 106–128.

34. Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А. Структурный подход к робастному управлению // Автоматика и телемеханика. 2011. № 8. С. 65–95.

35. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // Автоматика и телемеханика. 2017. № 12. С. 26–53.

36. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. – М.: Наука, 2006. – 272 с.

37. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный синтез систем управления роботами-манипуляторами в условиях неопределенности. – М. ЛЕНАНД, 2014. – 208 с.

38. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В., Нгуен Тхань Тиен. Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях // Проблемы управления. 2008. № 1. С 10–18.

39. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 520 с.

40. Лукьянов А.Г. Блочный метод синтеза нелинейных систем на скользящих режимах // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 14–34.

41. Маликов А.И. Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2018. № 3. С. 21–43.

42. Матюхин В.И. Управление механическими системами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 320 с.

43. Матюхин В.И. Непрерывные универсальные законы управления манипуляционным роботом // Автоматика и телемеханика. 1997. № 4. С. 31–44.

44. Матюхин В.И., Пятницкий Е.С. Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.

45. Мееров М.В. Системы многосвязного регулирования. – М.: Наука, 1965. – 384 с.

46. Миллер Б.М., Колосов К.С. Робастное оценивание на основе метода наименьших модулей и фильтра Калмана // Автоматика и телемеханика. 2020. №11. С. 72–92.

47. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.

48. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003. 282 с.

49. Пестерев А.В. Оценка области притяжения нулевого решения для аффинных систем с ограниченным управлением // Автоматика и телемеханика. 2017. № 4. С. 3–20.

50. Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б., Ткачев С.Б. Каноническое представление нестационарной задачи путевой стабилизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. Т. 54, № 4. С. 160-176.

51. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 18–41.

52. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 560 с, 2014.

53. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов // Стохастическая оптимизация в информатике. 2008. Т.4. С. 3–23.

54. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.

55. Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 1989. № 1. С.87-99.

56. Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции // Автоматика и телемеханика. 1989. № 2. С.57-71.

57. Пятницкий Е.С. Синтез систем управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 3. С. 92 -99.

58. Решмин С.А. Поиск главного бифуркационного значения максимального управляющего момента в задаче синтеза оптимального управления маятником // Изв. РАН. Теория, и системы управления. 2008. № 2. С. 5-20.

59. Решмин С.А. Метод декомпозиции в задаче управления перевернутым двойным маятником с использованием одного управляющего момента // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 6. С. 28-45.

60. Решмин С.А. Синтез управления двузвенным манипулятором // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 2. С. 146-150.

61. Рустамов Г.А. Анализ методов построения предельных робастных систем управления с большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Вып. 19. № 6. С.363-373.

62. Уткин В.А. Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // Автоматика и телемеханика. 2001. № 11. С. 73–94.

63. Уткин В.А., Уткин А.В. Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 62–81.

64. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.

65. Фомичев В.В., Высоцкий А.О. Каскадный метод построения наблюдателей для систем с неопределенностью // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1533-1539.

66. Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И. Об уравнения нулевой динамики некоторых аффинных нелинейных систем // ДУ. 2018. Т. 54. № 12. С. 1695–1709.

67. Фуртат И.Б. Алгоритм компенсации помех измерения и возмущений // Информационно-управляющие системы. 2017. №5. С. 21-29.

68. Цыкунов А.М. Робастное управление с компенсацией возмущений. – М.: Физматлит, 2012. – 304 с.

69. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.

70. Черноусько Ф.Л. Оптимальное перемещение многозвенной системы в среде с сопротивлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 240–255.

71. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в динамических системах// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 6. С. 64-82.

72. Чиликин М.Г., Сандлер А.С. Общий курс электропривода. – М.: Энергоиздат, 1981. – 577 с.

73. Шумихин А.Г., Бояршинова А.С. Идентификация сложного объекта управления по частотным характеристикам, полученным экспериментально на его нейросетевой динамической модели // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 125–132.

74. Юркевич В.Д. Синтез многоканальной системы управления роботами–манипуляторами на основе метода разделения движений // Автометрия. 2016. Т. 52. № 2. С. 107–114.

75. Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. – СПб: Наука, 2000. – 288 с.

76. Afri C., Andrieu V., Bako L. and Dufour P. State and parameter estimation: A nonlinear Luenberger observer approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62. No. 2. P. 973–980.

77. Alcorta-Garcia M.A. Optimal Filtering for Linear Systems: Kalman-Bucy versus Risk-Sensitive // Second International Conference on Innovative Computing, Informatio and Control (ICICIC 2007), Kumamoto. 2007. P. 353-353.

78. Alexandrov A.G., Chestnov V.N., Alexandrov V.A. Identification Based Control For Wind Turbine // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. № 1. P. 2272-2277.

79. Alexandrov V.A., Rezkov I.G., Shatov D.V. Identification of the quadcopter vertical translation dynamics // Proceedings of the 28th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'2020, Saint-Raphael, France). 2020. P. 363-368.

80. Alyoussef F., Kaya I. TRMS Experimental Results of New Nonlinear PID Tuned by DE Algorithm // 2019 International Conference on Applied Automation and Industrial Diagnostics (ICAAID). 2019. P. 1–6.

81. Angeles, J. Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods and Algorithms. Third Edition. – New York: Springer, 2007. – 573 p.

82. Anh Le Tuan, Kim Gook-Hwan, Kim Min Young, and Lee Soon-Geul. Partial Feedback Linearization Control of Overhead Cranes with Varying Cable Lengths // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2012. Vol. 13. No. 4. P. 501–507.

83. Antipov A.S., Krasnova S.A. Block Approach with Sigmoidal Feedbacks for Twin Rotor MIMO System Control // 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). 2020. P. 519-524.

84. Asif A. Kalman Bucy filter based data assimilation with Navy layered ocean model // 2004 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Montreal, Que. 2004. P. 113-116.

85. Bálint K. and Na W. Robust exact linearization of a 2D overhead crane // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51. No. 22. P. 354-359.

86. Bambulkar R.R., Phadke G.S. and Salunkhe S. Movement control of robot using fuzzy PID algorithm // 3rd International Conference on Electrical, Electronics, Engineering Trends, Communication, Optimization and Sciences (EEECOS 2016), Tadepalligudem. 2016. P. 1-5.

87. Benammar M. and Gonzales A.S.P. Angular position measurement using resolvers together with a robust linearization technique // 2015 IEEE 13th International Conference on Industrial Informatics (INDIN), Cambridge. 2015. P. 1510-1514.

88. Butt S.S., Aschemann H. Multi-variable integral sliding mode control of a two degrees of freedom helicopter // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48. No. 1. P. 802–807.

89. Cai X., Su S., Dai P., Lin L. and Lin R. Constructive Lyapunov functions and stabilizing feedback for nonlinear systems // 2009 Chinese Control and Decision Conference, Guilin. 2009. P. 341-343.

90. Cajo R., Agila W. Evaluation of Algorithms for Linear and Nonlinear PID Control for Twin Rotor MIMO System // 2015 Asia-Pacific Conference on Computer Aided System Engineering. 2015. P. 214-219

91. Chernikova O.S. An Adaptive Unscented Kalman Filter Approach for State Estimation of Nonlinear Continuous-Discrete System // 2018 XIV International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE), Novosibirsk. 2018. P. 37-40.

92. Clarke R., Waddington J. and Wallace J.N. The application of Kalman filtering to the load/pressure control of coal-fired boilers // IEE Colloquium on Kalman Filters: Introduction, Applications and Future Developments, London, UK. 1989. P. 2/1-2/6.

93. Dalwadi D.C. and Soni H.B. A novel channel estimation technique of MIMO-OFDM system based on Extended Kalman filter // 2017 4th International Conference on Electronics and Communication Systems (ICECS), Coimbatore. 2017. P. 158-163.

94. Drzenovic B. The Invariance Conditions in Variable Structure Systems //Automatica. 1969. V. 5. No. 3. P. 287–295.

95. Edwards C., Spurgeon S. Sliding mode control: theory and applications, Taylor & Francis Ltd, 237 p., 1998.

96. Edwards C., Spurgeon S., Patton R. Sliding mode observers for fault detection and isolation // Automatica. 2000. Vol. 36. No. 4. P. 541-553.

97. Fantoni I. and Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems, London: Springer Verlag, 2002, P. 43-51.

98. Feng H., Qiao W., Yin C, Yu H., Cao D. Identification and compensation of non-linear friction for a electro-hydraulic system // Mechanism and Machine Theory. 2019. V. 141. P. 1–13.

99. Golovan A. and Matasov A. The Kalman-Bucy filter in the guaranteed estimation problem // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39. No. 6. P. 1282-1286.

100. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. – The MIT Press, 2016.

101. Hall C., Shtessel Y. Sliding Mode Disturbance Observer-Based Control for a Reusable Launch Vehicle // Journal of Guidance Control and Dynamics - J GUID CONTROL DYNAM. 2006. Vol. 29. No. 6. P. 1315-1328.

102. Hargrave P.J. A tutorial introduction to Kalman filtering // IEE Colloquium on Kalman Filters: Introduction, Applications and Future Developments, London, UK. 1989. P. 1/1-1/6.

103. Hidalgo M., Garcia C. Friction compensation in control valves: Nonlinear control and usual approaches // Control Engineering Practice. 2018. V. 58. P. 42–53.

104. Mohammed J.R., Laila B.M. and Ashima C.R. Backstepping and adaptive backstepping control on robotic ARM // 2015 International Conference on Control Communication & Computing India (ICCC), Trivandrum. 2015. P. 1-6.

105. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME J. Basic Engrg. 1961. Vol. 83. P. 95–108.

106. Khalil H.K., Praly L. High-gain observers in nonlinear feedback control // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2014. Vol. 24. No. 6. P. 993–1015.

107. Khalil H. Nonlinear systems. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. – 750 p.

108. Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S. Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables // IFAC PapersOnLine. 2017. Vol. 50. No. 1, P. 1042-1047.

109. Kokunko Yu., Krasnova S. Synthesis of a tracking system with restrictions on UAV state variables // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA). 2019. Vol. 10. No. 4. P. 695–705.

110. Korkmaz M., Aydoğdu O. and Doğan H. Design and performance comparison of variable parameter nonlinear PID controller and genetic algorithm based PID controller // 2012 International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications, Trabzon. 2012. P. 1-5.

111. Krasnova S.A., Kochetkov S.A., Utkin V.A. Block design of tracking system under unmatched disturbances via sigmoidal feedbacks // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1798 (020078).

112. Krasnova S.A., Antipov A.S. Block synthesis of tracking system for inverted pendulum via sigmoidal feedbacks // Proc. of 2019 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). 2019. P. 1–5.

113. Krishnamurthy P. and Khorrami F. Decentralized control of large-scale nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228), Orlando, FL, USA. 2001. Vol. 2. P. 1322-1327.

114. Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // Int. J. Control. 2003. V. 76. No. 9. P. 924–941.

115. Li Q., Li R., Ji K. and Dai W. Kalman Filter and Its Application // 2015 8th International Conference on Intelligent Networks and Intelligent Systems (ICINIS), Tianjin. 2015. P. 74-77.

116. Liu D., Guo W., Yi J. and Zhao D. Passivity-based-control for a class of underactuated mechanical systems // Proceedings of 2004 International Conference on Intelligent Mechatronics and Automation. 2004. P. 50-54.

117. Luenberger D.B. Observers of multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. 11. No. 2. P. 190–197.

118. Mochnac J., Marchevsky S. and Kocan P. Bayesian filtering techniques: Kalman and extended Kalman filter basics // 2009 19th International Conference Radioelektronika, Bratislava. 2009. P. 119-122.

119. Moon C., Han J.S. and Kwon Y.A. Square-root unscented Kalman filter for state estimation of permanent magnet synchronous motor // 2016 55th

Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE), Tsukuba. 2016. P. 460-464.

120. Nguyen Q.V., Hyun C.-H. Multiple Sliding Surface Control Approach to Twin Rotor MIMO Systems // International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems. 2014. Vol. 14. No. 3. P. 171–180.

121. Papadopoulos A.D., Rompokos A.A. and Alexandridis A.T. Nonlinear and observer-based PD position and sway control of convey-crane systems // 2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). 2016. P. 696-700.

122. Petersen I.R. The Matching Condition and Feedback Controllability of Uncertain Linear Systems. In: Kaashoek M.A., van Schuppen J.H., Ran A.C.M. (eds) Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control. Progress in Systems and Control Theory. Vol 4. Birkhäuser Boston.

123. Pourmohammad S. and Yazdizadeh A. Adaptive fuzzy multivariable controller design based on the Lyapunov scheme // 2008 IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems, Chengdu. 2008. P. 893-898.

124. Robenack K. and Lynch A.F. High-gain nonlinear observer design using the observer canonical form // IET Control Theory & Applications. 2007. Vol. 1. No. 6. P. 1574-1579.

125. Romero J.G., Donaire A. and Borja P. Global Stabilisation of Underactuated Mechanical Systems via PID Passivity-Based Control // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 9577-9582.

126. Sambariya D.K., Prasad R. and Birla D. Design and performance analysis of PID based controller for SMIB power system using Firefly algorithm // 2015 2nd International Conference on Recent Advances in Engineering & Computational Sciences (RAECS), Chandigarh. 2015. P. 1-8.

127. Seifullaev R.E., Fradkov A., Liberzon D. Energy control of a pendulum with quantized feedback // Automatica. 2016. Vol. 67. P. 171-177.

128. Slotine J.E. Sliding controller design for non-linear systems // Int. J. Control. 1984. Vol. 40. No.2. P. 421–434

129. Slotine J.E., Li W. Applied Nonlinear Control. – New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
130. Sodhi P., Kar I. Adaptive backstepping control for a twin rotor MIMO system // IFAC Proceedings Volumes. 2014. Vol. 47. No. 1. P. 740–747.
131. Soleymanpour S. and Navabi M. Integrated adaptive backstepping attitude control of spacecraft // 2017 IEEE 4th International Conference on Knowledge-Based Engineering and Innovation (KBEI), Tehran. 2017. P. 0949-0954.
132. Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M. Robot Modeling and Control. – New York: Wiley, 2005. – 496 p.
133. Spurgeon S.K. Sliding mode observers: a survey // International Journal of Systems Science. 2008. Vol. 39. No. 8. P. 751-764.
134. Sun Y., Yan S., Cai B. and Wu Y. Feedback Linearization Control for DC-based DFIG Systems // 2018 Chinese Automation Congress (CAC), Xi'an, China. 2018. P. 1677-1680.
135. Tsytkin Y., Polyak B. High-Gain Robust Control // European Journal of Control. 1999. Vol. 5. P. 3–9.
136. Twin Rotor MIMO System Control Experiments 33-949S. East Sussex, UK: Feedback Instruments, 2006. 39 p.
137. Urrea C., Pascal, J. Parameter identification methods for real redundant manipulators // Journal of Applied Research and Technology. 2019. Vol. 15. No. 4.
138. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. N. Y.: CRC Press, 2009.
139. Wang N., Liu H. and Chen W. Lyapunov-based excitation control for the synchronous generator unit // Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference, Xi'an. 2013. P. 899-903.
140. Wang Y., Xia Z. and Zhang T. Sliding mode variable structure control based on exact linearization mode of nonlinear system // Proceedings of the 10th

World Congress on Intelligent Control and Automation, Beijing. 2012. P. 2878-2881.

141. Wonham W.M. Linear Multivariable control: a geometric approach. N. Y.: Springer-Verlar, 1979.

142. Yang S. and Baum M. Extended Kalman filter for extended object tracking // 2017 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), New Orleans, LA. 2017. P. 4386-4390.

ПРИЛОЖЕНИЕ



ООО «Меридиан» ИНН/КПП 9721078708/772101001, ОГРН 1197746223091, Адрес: 109507, Москва г, Ферганский проезд, дом 3/2, 224 тел. +79032622165, +79266034147, www.meridian-auto.ru
email: info@meridian-auto.ru

АКТ

**о внедрении результатов диссертационной работы
«Блочный метод синтеза сигмоидальных обратных связей
для мехатронных систем при действии возмущений»
на соискание ученой степени кандидата технических наук
Антипова Алексея Семеновича**

Диссертационная работа Антипова А.С. посвящена разработке методов автоматического управления и синтеза систем слежения для мехатронных объектов с неопределенными массо-инерционными характеристиками, функционирующих при действии внешних несогласованных возмущений, которые не могут быть непосредственно компенсированы с помощью истинного управления. Для практической реализуемости алгоритмов при синтезе законов управления учитывались имеющиеся конструктивные и проектные ограничения на развиваемые обобщенные скорости, силы и моменты. В рамках диссертационного исследования разработаны процедуры блочного синтеза нелинейных локальных связей в виде сигма-функций, обеспечивающие заданные характеристики процесса слежения при различных режимах работы мехатронных объектов и не требующие перенастройки при изменении условий эксплуатации и внешних факторов в допустимых пределах. Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована с помощью численного моделирования для ряда мехатронных систем, в том числе для транспортировочного крана.

Настоящий акт составлен о том, что алгоритмы синтеза систем управления для мехатронных объектов, в которых число управляющих воздействий меньше, чем число степеней свободы, разработанные и представленные в кандидатской диссертации Антипова А.С., приняты к испытаниям ООО «Меридиан» для системы управления однобалочными мостовыми кранами типа CXTS10-TON. Данные краны используются для перемещения грузов на складском логистическом комплексе в Астраханской области (Черноярский район, с. Солodники).

Методы и алгоритмы управления, разработанные в диссертационной работе, позволяют:

- 1) обеспечить выполнение рабочих режимов без перенастройки параметров системы управления ходовой тележкой однобалочного мостового крана при изменении массы прикрепленного к ней груза от 500 до 9071,84 [кг];
- 2) организовать аналитическое резервирование измерительной системы на случай выхода из строя датчика скорости и повысить надежность системы управления;
- 3) уменьшить амплитуду колебаний переносимого груза и, как следствие, повысить безопасность процесса транспортировки по сравнению со стандартно используемым ПД-регулятором.

Генеральный директор

Технический директор складского комплекса



Е.Л. Чурганова

В.В. Дебарович