

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 519.715+681.514

ББК 22.18

На правах рукописи



БЕЛОВ Алексей Анатольевич

**МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ АНИЗОТРОПИЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ЛИНЕЙНЫМИ ДЕСКРИПТОРНЫМИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИ
НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ**

Специальность 05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д.т.н. Чайковский М.М.

Москва — 2022

Оглавление

Список обозначений	5
Введение	8
1 Основные понятия анизотропийной теории и теории дескрипторных систем	25
1.1 Основные понятия теории дескрипторных систем	25
1.2 Анизотропия случайного вектора и средняя анизотропия сигнала	38
1.3 Вспомогательные результаты, используемые в диссертации	42
Выводы к главе 1	46
2 Анизотропийный анализ дескрипторных систем с точно известными параметрами	47
2.1 Нормы передаточной функции дескрипторной системы	47
2.2 Общая постановка задачи анизотропийного анализа	58
2.3 Анизотропийный анализ на основе Риккати подхода	59
2.4 Анизотропийный анализ дескрипторных систем на основе выпуклой оптимизации	72
2.5 Модификация анизотропийной частотной теоремы: строгие условия	80
Выводы к главе 2	91
3 Синтез анизотропийных регуляторов для дескрипторных систем с точно известными параметрами	93

3.1	Оптимальное управление	93
3.1.1	Общая постановка задач оптимального управления	93
3.1.2	Оптимальное управление по переменным состояниям	95
3.1.3	Оптимальное управление по выходной переменной	101
3.2	Субпотимальное управление	115
3.2.1	Общая постановка задачи субоптимального управления	115
3.2.2	Синтез субоптимального анизотропийного управления на основе Риккати подхода	116
3.2.3	Синтез субоптимального анизотропийного управления на основе выпуклой оптимизации	121
3.2.4	Синтез модального управления с анизотропийным критерием качества	127
	Выводы к главе 3	137
4	Анизотропийный анализ и синтез анизотропийных регуляторов для параметрически неопределенных дескрипторных систем	139
4.1	Общая постановка задачи анализа и управления	139
4.2	Анизотропийный анализ дескрипторных систем с неопределенностями	142
4.3	Синтез робастного анизотропийного управления для систем с неопределенностью	150
4.4	Синтез робастного модального управления с анизотропийным критерием качества	156
4.5	Частный случай: задача робастного \mathcal{H}_∞ анализа и управления	163
	Выводы к главе 4	175
5	Анизотропийный анализ и синтез робастных анизотропийных регуляторов для обыкновенных систем с параметрическими неопределенностями	176

5.1	Анизотропийный анализ и синтез анизотропийного управления для политоических систем	177
5.1.1	Общая постановка задачи анализа и управления	178
5.1.2	Анизотропийный анализ политоических систем	180
5.1.3	Синтез робастного анизотропийного управления по состоянию для политоических систем	197
5.2	Анизотропийный анализ и синтез анизотропийных регуляторов для систем с ограниченными по норме неопределенностями	215
5.2.1	Анизотропийный анализ систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями	216
5.2.2	Постановка задачи синтеза робастных регуляторов	222
5.2.3	Синтез робастного анизотропийного регулятора по состоянию	224
5.2.4	Синтез статического робастного регулятора по выходу	231
5.2.5	Синтез динамического регулятора заданного порядка по выходу	234
	Выводы к главе 5	242
	Заключение	243
	Список литературы	246

Список обозначений

\mathbb{Z}	— множество целых чисел;
\mathbb{R}	— множество действительных (вещественных) чисел;
\mathbb{R}^n	— множество n -мерных векторов с элементами из \mathbb{R} ;
$\mathbb{R}^{m \times n}$	— множество матриц размерности $m \times n$ с вещественными коэффициентами;
\mathbb{C}	— множество комплексных чисел;
$\deg(f(x))$	— степень полинома $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, $\deg(f(x)) = n$, если $a_n \neq 0$;
$\det A$	— определитель матрицы A ;
$\text{rank}(A)$	— ранг матрицы A ;
$\text{cov}(w_0)$	— ковариационная матрица случайного вектора w_0 ;
$\text{tr } A$	— след матрицы A : $\text{tr } A = \sum_j a_{jj} = \sum_j \lambda_j(A)$;
A^T	— транспонирование матрицы A : $A^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$;
I	— единичная матрица;
I_n	— единичная матрица размерности $n \times n$;

- A^{-1} — обратная матрица: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$;
- $\text{He}(A)$ — $\text{He}(A) = A + A^T$;
- $\text{Ker}(W)$ — ядро линейного отображения W : $\text{Ker}(W) = \{x : x \in X, W(x) = 0\}$;
- $\text{Im}(W)$ — образ линейного отображения W : $\text{Im}(W) = \{y : y = W(x), \text{ для некоторого } x \in V\}$;
- $\text{span}(W)$ — линейная оболочка подмножества W линейного пространства;
- $\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ — диагонализированная матрица с матричными элементами A_i , стоящими на главной диагонали, и нулями в остальных местах, $i = \overline{1, n}$;
- $\sigma_{\max}(M)$ — максимальное сингулярное число матрицы M ;
- $F^*(z)$ — эрмитово сопряжение;
- $\widehat{F}(\omega)$ — значение передаточной функции $F(z)$ на границе единичного круга: $\widehat{F}(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\omega})$;
- $\Re \lambda$ — обозначение действительной части комплексного числа λ ;
- $\Im \lambda$ — обозначение мнимой части комплексного числа λ ;
- $\|G\|_2$ — \mathcal{H}_2 -норма передаточной функции;
- $\|G\|_\infty$ — \mathcal{H}_∞ -норма передаточной функции;

- $\|G\|_a$ — a -анизотропийная норма передаточной функции;
- $\mathbf{E}(\cdot)$ — математическое ожидание случайной величины;
- $\lambda(A)$ — спектр матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\lambda(A) = \{\lambda_i : \det(\lambda I - A) = 0, i = \overline{1, n}\}$;
- $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$;
- A^+ — псевдообратная матрица для матрицы A , которая удовлетворяет уравнениям $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $(AA^+)^T = AA^+$, $(A^+A)^T = A^+A$;
- $\{u(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — числовая последовательность вида $(\dots, u(-k), \dots, u(-1), u(0), u(1), \dots, u(k), \dots)$;
- \mathcal{L}_2 — множество суммируемых с квадратом дискретных вещественных последовательностей $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}, k \geq 0}$: $\{W \in \mathcal{L}_2 : \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) < \infty\}$;
- $\mathbf{D}(P\|M)$ — относительная энтропия (уклонение Кульбака-Лейблера) вероятностной меры P относительно вероятностной меры M ;
- $\mathbf{A}(w)$ — анизотропия случайного вектора $w \in \mathbb{R}^m$, где m — натуральное число;
- $\overline{\mathbf{A}}(W)$ — средняя анизотропия случайной последовательности $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$;
- $\overline{\mathbf{A}}(G)$ — средняя анизотропия случайной последовательности W , получаемой из белого шума V посредством генерирующего фильтра G .

Введение

Актуальность темы.

Задачи подавления внешних возмущений, действующих на объект управления, являются чрезвычайно важными в теории автоматического регулирования. Реальные технические объекты управления, как правило, функционируют в условиях неопределенностей, связанных как с неизвестными заранее и неизмеряемыми возмущениями, так и со случайными ошибками измерения. Для решения задач подавления возмущений в теории управления применяются разнообразные подходы. Среди подобных подходов можно выделить геометрические подходы, компенсационные подходы, а также методы минимизации влияния определенного класса возмущений на управляемый выход системы. В последнем случае подавление влияния внешних возмущений может быть реализовано для некоторого наперед заданного множества сигналов без его измерения. Такие подходы заключаются в минимизации операторной нормы от возмущающего воздействия к управляемому выходу. В классе линейных систем к наиболее популярным методам минимизации операторной нормы от возмущающего воздействия к управляемому выходу относятся LQG/ \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ подходы. Минимизация того или иного критерия качества позволяет наилучшим образом подавлять заданный класс внешних возмущений, действующих на систему. Так, LQG/ \mathcal{H}_2 регулятор позволяет наилучшим образом минимизировать среднеквадратичное отклонение выходной переменной системы, на которую действует гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. В случае \mathcal{H}_∞ управления минимизируется максимальная (по всему диапазону частот) операторная норма передаточной матрицы (как коэффициент усиления

внешнего возмущающего воздействия) [134, 154, 277, 282]. Регуляторы, полученные с использованием \mathcal{H}_∞ подхода, как правило излишне консервативны, что приводит к большим энергетическим затратам на реализацию закона управления исполнительным устройством. Для преодоления этого недостатка могут быть использованы смешанные $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ методы [227] или так называемый метод формирования контура [195]. Метод формирования контура заключается в использовании дополнительных фильтров, отсекающих определенный диапазон частот. Однако, такой подход является строго индивидуальным к каждому объекту и требует глубокого исследования. Смешанные $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ методы позволяют минимизировать \mathcal{H}_∞ норму передаточной функции от возмущения к одному управляемому выходу с ограничением на \mathcal{H}_2 норму передаточной функции от возмущения к другому выходу. Смешанный $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ подход к управлению системами с неопределенностями был применен в [240].

Также, как и теория \mathcal{H}_∞ управления, анизотропийная теория, предложенная И.Г. Владимировым, изучает возможности подавления системой случайных внешних возмущений. В отличие от перечисленных выше подходов, анизотропийная теория управления учитывает окрашенность случайного входного возмущения. Мерой окрашенности выступает неотрицательное число, называемое средней анизотропией, которая используется для теоретико-информационного (или энтропийного) описания статистической неопределенности в отношении случайных шумов [19, 119, 267, 263, 239]. В работе [268] было получено решение задачи оптимального анизотропийного управления в форме динамической обратной связи полного порядка при неполном измерении вектора состояния. При этом были преодолены недостатки LQG/ \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторов. Ключевым шагом в дальнейшем развитии анизотропийной теории явилась частотная теорема, сформулированная сначала в терминах уравнений Риккати Е.А. Максимовым в работе [174], а позднее записанная М.М. Чайковским в терминах матричных неравенств в [258]. Работа [258] положила начало развитию теории субоптимального анизотропийного управления линейными системами. В

[31] приводятся решения для задач синтеза субоптимальных анизотропийных регуляторов при полном и неполном измерении вектора состояния, с дополнительными критериями, а также для одного класса систем с параметрическими неопределенностями. Было показано, что применение анизотропийных регуляторов при управлении дискретными системами существенно уменьшает энергетические затраты на управление за счет учета статистической неопределенности случайного внешнего возмущения, не снижая при этом качества переходных процессов. При этом случаи \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ управления могут рассматриваться как частные предельные случаи анизотропийной теории.

Системы управления, замкнутые анизотропийными регуляторами, являются более робастными, чем системы, замкнутые \mathcal{H}_2 регуляторами, и менее консервативными, чем системы, замкнутые \mathcal{H}_∞ регуляторами. В работах [18, 23, 175] рассматривались сравнения возможностей \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ и анизотропийных регуляторов в задаче подавления внешнего возмущения типа сдвига ветра при посадке самолета в присутствии случайных окрашенных шумов измерений. Анизотропийные регуляторы показали значительные преимущества по сравнению с \mathcal{H}_∞ регуляторами в вопросах энергозатрат на управление. Учитывая все преимущества анизотропийного подхода к синтезу робастных регуляторов, дальнейшее развитие методов анизотропийного анализа и управления для новых классов систем является важной и актуальной задачей. Среди таких классов систем следует выделить дескрипторные системы.

Дескрипторные системы являются естественным обобщением обыкновенных систем при составлении математических моделей реальных объектов управления. Математические модели систем управления строятся на основе известных законов природы: физических, химических, биологических и т.д. Такие законы имеют как дифференциальную (например, второй закон Ньютона), так и алгебраическую форму (закон Кирхгофа). Обычно математическая модель объекта управления записывается в форме дифференциальных или разностных уравнений. Однако существуют ситуации, когда такой формы описания бывает

недостаточно. Попытки задания подобных систем с помощью только дифференциальных или разностных уравнений могут привести к потере информации или же к описанию системы в некоторых абстрактных переменных, называемых фазовыми переменными. Это может затруднять практическую реализацию управляющих устройств, а также может приводить к снижению качества регулирования реальными объектами.

Таким образом, при выборе математической модели системы в переменных, которые имеют реальный физический смысл, приходится сталкиваться с тем, что она может содержать в себе не только дифференциальные, но и алгебраические связи и ограничения. Запись математической модели системы управления в алгебро-дифференциальной форме, как правило, влечет за собой невозможность разрешить данную совокупность алгебро-дифференциальных уравнений относительно первой производной. Это приводит к появлению нового класса систем, называемых алгебро-дифференциальными или дескрипторными системами.

Происхождение теории дескрипторных систем восходит к работам К. Вейерштрасса и Л. Кронекера [167, 271] о параметризуемых семействах билинейных форм. В терминах матриц для анализа линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возможными вырождениями главного коэффициента матрицы Ф.Р. Гантмахером были использованы матричные пучки [20].

Дальнейшее развитие теория получила в работах П. Дирака об обобщенных Гамильтоновых системах [121, 122, 123]. Основная идея, которая рассмотрена в вышеописанных работах, в современной науке называется индексом дифференцирования полуявных дескрипторных систем. Геометрический метод изучения так называемых систем с ограничениями, освещенных в работах Дирака, нашел свое применение в механике [56, 149, 150, 196, 236, 237, 238]. Механические системы как дескрипторные системы в дальнейшем стали объектом широкого исследования [140, 156, 180].

Большое число исследований в теории дескрипторных систем относится так-

же к теории электрических схем. Появление дифференциальных и алгебраических уравнений в моделях таких систем связано с комбинацией дифференциальных уравнений, описывающих поведение реактивных элементов, и алгебраических зависимостей, основанных на законах Кирхгофа и характеристиках элементов [129, 225, 226, 242].

Математическая теория алгебро-дифференциальных систем начала активно развиваться в 1970х гг. независимо в различных областях техники. Необходимо выделить работы Гира [138], Тэйкенса [257], а также монографии Кэмпбелла [97, 98] и Петзолда [214], вышедшие в начале 1980х гг. В данных работах основное внимание было акцентировано на численных аспектах моделирования дескрипторных систем. В настоящее время достаточно большое внимание уделяется алгебро-дифференциальным системам в частных производных [86, 192, 222], а также стохастическим дескрипторным системам [232].

В отечественной и зарубежной литературе алгебро-дифференциальные системы [10, 32, 95] называются также сингулярными системами [97, 98, 116], обобщенными системами в пространстве состояний (или обобщенными системами) [60], неявными системами [46, 55] или дескрипторными системами [202, 203]. Также в отечественной литературе можно встретить термин «системы Леонтьевского типа» [14, 21, 29]. Наиболее часто в зарубежной литературе используется понятие «дескрипторные системы». В данном случае предполагается, что переменные, формирующие математическую модель объекта управления, описывают некий реальный процесс, протекающий в объекте (от англ. descriptor - описатель).

Дескрипторные системы нашли свое приложение при моделировании движения летательных аппаратов [245], химических процессов [57, 58, 168], в схемотехнике [202, 203, 225, 226], в экономических системах [187], для описания соединенных между собой систем высокого порядка [188], в технических системах [48, 158], в энергетических системах [234], для описания механических систем [56, 217] и в робототехнике [197]. Дескрипторные системы имеют неко-

торые характерные отличия от обыкновенных систем (здесь и далее обыкновенными будем называть системы, описываемые только дифференциальными или только разностными уравнениями). Для дескрипторных систем характерны следующие свойства [81, 141, 262]:

- Передаточная функция дескрипторной системы может не являться правильной.
- Для произвольных ограниченных начальных условий в решениях алгебро-дифференциальных уравнений могут присутствовать обобщенные функции (импульсное поведение), а для алгебро-разностных уравнений решение может зависеть от будущих моментов времени (непричинное поведение).
- Решение линейного алгебро-дифференциального уравнения обычно содержит три типа компонент: ограниченные динамические компоненты, соответствующие дифференциальной составляющей; нединамические компоненты, соответствующие алгебраическим составляющим; неограниченные динамические компоненты из класса обобщенных функций, наличие которых зависит от гладкости входного сигнала, а также от начальных условий.

Несмотря на указанные выше особенности, исследование дескрипторных систем представляет достаточно перспективное направление как с точки зрения фундаментальных исследований, так и с точки зрения практического применения. Существенные отличия дескрипторных систем от обыкновенных потребовали развития и обобщения математического аппарата для них.

Многие фундаментальные понятия и результаты из теории обыкновенных систем были успешно обобщены на дескрипторные системы: разрешимость алгебро-дифференциальных уравнений, исследование управляемости и наблюдаемости [10, 32, 34, 116]; канонические формы и представления дескрипторных

систем [13, 99, 146, 147, 178]; минимальные реализации [113, 130, 153]; эквивалентность систем [116, 157, 249, 262]; регулярность и регуляризация [91, 92, 93, 94, 106, 107]; устойчивость и стабилизация [142, 159, 179, 206, 231, 273]; модальное управление [35, 108, 116, 144, 145, 235, 278]; линейно-квадратичное оптимальное управление [81, 171, 207]; синтез наблюдателей и фильтрация [117, 118, 198, 208, 209]; теоремы и уравнения Ляпунова [80, 160, 248, 254, 280]; редукция модели [251, 281]; \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ управление [103, 104, 132, 133, 161, 166, 194, 253, 255, 256, 270, 273].

Резюмируя вышесказанное, можно сделать вывод, что актуальность развития анизотропийной теории и разработка новых методов анизотропийного анализа и синтеза робастных регуляторов для новых классов не вызывает сомнений. Эти методы позволяют обобщать в рамках единого подхода разрозненные существующие и появляющиеся в настоящий момент результаты анализа и синтеза LQG/ \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ регуляторов для линейных систем, как обыкновенных (задаваемых разностными уравнениями), так и дескрипторных (алгебро-разностных) систем.

Целями данного диссертационного исследования являются разработка новых методов анализа и синтеза для класса линейных дескрипторных систем на основе анизотропийного подхода к описанию внешних возмущений и распространение методов анизотропийной теории управления на некоторые классы параметрически неопределенных обыкновенных систем.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Для линейных дискретных допустимых дескрипторных систем требуется получить аналитические условия, позволяющие оценить величину анизотропийной нормы системы во временной области.
2. Для линейных дискретных дескрипторных стабилизируемых и причинно управляемых систем необходимо разработать методы синтеза оптимальных анизотропийных законов управления при полном и неполном измере-

нии вектора состояния, которые делают замкнутую систему допустимой и минимизируют ее анизотропийную норму от возмущения к управляемому выходу.

3. Для линейных дискретных дескрипторных систем требуется разработать методы синтеза субоптимальных регуляторов по состоянию, которые делают замкнутую систему допустимой и гарантируют ограниченность ее анизотропийной нормы.
4. Требуется разработать аналитические методы робастного анизотропийного анализа и синтеза субоптимальных законов управления по состоянию для линейных дискретных дескрипторных систем с параметрическими ограниченными по норме неопределенностями.
5. Требуется разработать аналитические методы робастного анизотропийного анализа линейных дискретных обыкновенных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями.
6. Для линейных дискретных обыкновенных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями необходимо разработать методы синтеза субоптимальных анизотропийных регуляторов, гарантирующих робастную устойчивость замкнутых систем, а также ограничивающих величину анизотропийной нормы от возмущения к управляемому выходу.

Научная новизна заключается в распространении методов анизотропийной теории управления на дескрипторные системы и на некоторые классы параметрически неопределенных обыкновенных систем. Результаты, полученные в диссертационной работе, постановки задач и методы их решения являются новыми в анизотропийной теории управления. К основным новым результатам относятся следующие:

1. Разработаны методы анизотропийного анализа и вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с использованием обобщенных алгебраических уравнений Риккати и методов выпуклой оптимизации.
2. Для дескрипторных систем получены формулы для вычисления оптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати.
3. Для класса дескрипторных систем разработаны методы синтеза субоптимального анизотропийного управления при полном измерении вектора состояния.
4. Для класса дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями были разработаны методы робастного анизотропийного и \mathcal{H}_∞ анализа и синтеза анизотропийного и \mathcal{H}_∞ управления.
5. Решены задачи робастного анизотропийного анализа и управления для класса обыкновенных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями с использованием техники выпуклой оптимизации.
6. Были разработаны методы робастного анизотропийного анализа и синтеза робастного анизотропийного управления для политопических систем.

Теоретическая значимость. Обобщение анизотропийного подхода на класс дескрипторных систем позволило объединить в рамках единой теории методы анализа и синтеза линейных систем, использующих в виде критерия качества норму вход-выходного оператора системы. Таким образом, в рамках общей концепции удалось объединить разрозненные до настоящего момента методы \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ теорий для дескрипторных систем как частные случаи анизотропийного подхода, а также рассматривать обыкновенные системы как частный

случай дескрипторных систем. Впервые методы выпуклой оптимизации были применены для анализа и синтеза робастных систем с параметрическими ограниченными по норме и политопическими неопределенностями.

Практическая значимость. Полученные в диссертационном исследовании методы анализа и синтеза робастных систем автоматического управления с точно известными параметрами позволяют снизить консерватизм замкнутых систем по сравнению с \mathcal{H}_∞ регуляторами, повышая робастность по отношению к статистическим неопределенностям в распределениях случайных возмущений. Такие регуляторы могут заметно уменьшить энергозатраты на управление и продлить время автономной работы замкнутых систем за счет более тонкой настройки закона управления. Методы анализа и синтеза анизотропийного управления для систем с неточно заданными параметрами позволяют повысить робастное качество замкнутых систем в условиях параметрической неопределенности объектов управления, вызванных неточно известной математической моделью или технологическими допусками при производстве компонент объектов управления.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методы анизотропийного анализа и синтеза оптимального и субоптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати, а также с помощью методов выпуклой оптимизации.
2. Методы робастного анизотропийного и \mathcal{H}_∞ анализа и синтеза робастного анизотропийного и \mathcal{H}_∞ управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.
3. Методы робастного анизотропийного анализа и синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями на основе методов выпуклой

оптимизации.

4. Методы робастного анизотропийного анализа и синтеза робастного анизотропийного управления обыкновенной системой с политоическими параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния.

Соответствие паспорту специальности. Работа соответствует специальности 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации (в отраслях информатики, вычислительной техники и автоматизации)» по пунктам:

- Теоретические основы и методы системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- Формализация и постановка задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- Разработка методов и алгоритмов решения задач системного анализа, оптимизации, управления, принятия решений и обработки информации.
- Теоретико-множественный и теоретико-информационный анализ сложных систем.

Методы исследования. В работе применяются методы линейной алгебры, теории вероятностей и случайных процессов, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теория обработки сигналов, методы математического моделирования и методы оптимизации.

Степень обоснованности и достоверности полученных научных результатов. Достоверность полученных результатов обоснована приведенными доказательствами лемм и теорем, корректностью проведенных математических преобразований, а также дополнительно проверена результатами математиче-

ского и компьютерного моделирования, согласующимися с теоретическими результатами.

Апробация. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных конференциях:

1. XI Международная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого), Москва, 2010.
2. 9-th International Conference Process Control 2010, Kouty nad Desnou: Czech Republic, 2010.
3. Конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-Петербург)
4. 11-й Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2014, Арзамас)
5. I, II, IV Всероссийская молодежная летняя школа «Управление, информация и оптимизация», 2009, 2010, 2012.
6. 19th International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2013)
7. 13th European Control Conference (ECC 2014, Strasbourg, France)
8. 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON 2015)
9. European Control Conference (ECC-2015, Linz, Austria)
10. 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)
11. 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2017, Valletta, Malta)

12. 21st International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2017)
13. 20th IFAC World Congress, 2017
14. 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018, Zadar, Croatia)
15. 14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB-2018, Moscow)
16. 18th IFAC Symposium on System Identification, SYSID 2018, Stockholm, Sweden
17. 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization Yekaterinburg, CAO-2018
18. 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland)
19. 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019)
20. International Workshop Navigation and Motion Control (NMC 2019), 2019, Saint Petersburg, Russia
21. 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 39 работ. В том числе 2 монографии ([8] в рамках издательского гранта РФФИ “д”, [71] индексируется в Web of Science), 16 журнальных статей в рецензируемых изданиях (15 индексируются в Web of Science и Scopus [27, 38, 41, 42, 47, 61, 62, 64, 66, 68, 69, 73, 72, 75, 79], а [76] индексируется в Scopus), 20 статей в сборниках конференций (13 индексируются в Web of Science и Scopus

[36, 37, 39, 44, 45, 63, 67, 70, 74, 77, 78, 87, 162], 3 индексируются в Scopus [40, 43, 65], 4 конференции индексируются в РИНЦ [3, 6, 7, 9]), 1 брошюра [4].

Среди опубликованных по теме диссертации работ пять статей из рецензируемых изданий являются сольными — [62, 76, 77, 78, 79].

Личный вклад соискателя.

Все исследования, представленные в диссертационной работе, постановки и решения задач, формулировки и доказательства теорем, вычислительные эксперименты выполнены лично соискателем в процессе научной деятельности. Из совместных публикаций в диссертацию без ссылки включен лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Связь с планами научных исследований.

Результаты работы были использованы при выполнении следующих проектов:

1. Грант РФФИ 14–08–00069 А Построение анизотропийной теории при ненулевом математическом ожидании входного возмущения.
2. Грант РФФИ 15–08–07019 Д Издание книги “Дескрипторные системы и задачи управления.”
3. Грант РФФИ 16–38–00216 мол_а Обеспечение заданного качества переходных процессов в анизотропийной теории для дескрипторных систем и решение задач анизотропийной фильтрации для дискретных обыкновенных и дескрипторных систем.
4. Грант РФФИ 17–08–00185 А Построение анизотропийной теории робастного управления и фильтрации для стационарных и нестационарных линейных систем при нулевом и ненулевом математическом ожидании входного возмущения.
5. Грант РФФИ 18–38–00076 мол_а Понижение влияния внешних возмущений для линейных дискретных систем с параметрическими неопределен-

ностями.

6. Государственной программа финансовой поддержки ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074–U01) в рамках программы ITMO Postdoctoral Fellowship program.
7. Грант РНФ 18–71–00105 Разработка методов синтеза отказоустойчивых систем управления, находящихся под влиянием случайных возмущений.

Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка публикаций, списка литературы. Работа изложена на 277 страницах, содержит 35 иллюстраций, 10 таблиц. Список цитируемой литературы включает 282 наименования.

Содержание работы.

Изложение диссертационной работы построено следующим образом. Во введении обоснована актуальность и значимость исследуемой проблематики, дан обзор литературы, сформулированы цель и задачи исследования, основные положения, выносимые на защиту, приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

Глава 1. В главе 1 рассмотрены основные особенности дискретных дескрипторных систем, дано краткое изложение теории анизотропного анализа линейных систем управления, а также приведены формулировки известных лемм и теорем, которые будут использоваться в дальнейшем изложении и получения новых результатов. В первом разделе даются основные определения, относящиеся к теории дескрипторных систем, вводятся понятия эквивалентных форм, понятия регулярности, причинности, устойчивости и допустимости дескрипторной системы. Также рассмотрены различные виды управляемости и наблюдаемости и приведены формулы для вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости дескрипторных систем. Эти результаты известны и по-

этому приводятся в обзорной форме, без доказательств с указанием ссылок на первоисточники.

Глава 2. В данной главе вводятся понятия \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ и анизотропийной норм передаточной функции дескрипторной системы. Следует заметить, что понятия \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ норм являются общеизвестными, но вынесены во вторую главу для удобства изложения материала работы. Приведены алгоритмы для вычисления соответствующих норм и вычислительные примеры. Далее в главе ставится задача анизотропийного анализа дескрипторной системы в более широком смысле, которая заключается в одновременной проверке ее на допустимость и оценке ограниченности анизотропийной нормы дескрипторной системы наперед заданным числом. Для решения данной задачи были сформулированы и доказаны различные варианты анизотропийной частотной теоремы. Первый вариант основан на решении обобщенного алгебраического уравнения Риккати, второй и третий — на применении метода матричных неравенств. Рассмотрены алгоритмы вычисления анизотропийной нормы системы на основе приведенных вариантов анизотропийной частотной теоремы. Результаты показаны на примерах.

Глава 3 посвящена решению задачи синтеза анизотропийного управления для дескрипторных систем с точно известными параметрами. Главу условно можно разделить на две части: оптимальное управление и субоптимальное управление. В начале главы приводятся решение для оптимальных задач как при полном измерении вектора состояния, так и по выходной переменной. Обе методики сводятся к решению систем уравнений, включающих в себя алгебраические (обобщенные и обыкновенные) уравнения Риккати, уравнения (обобщенные и обыкновенные) Ляпунова, а также уравнения специального вида относительно средней анизотропии входного возмущения. Во второй части решается задача субоптимального анизотропийного управления при измерении состояния объекта и при полной информации. Решения получены в двух видах: на основе обобщенных алгебраических уравнений Риккати и на основе матричных нера-

венств. Эффективность разработанных методов показана на вычислительных примерах.

В **главе 4** рассмотрена задача робастного анизотропийного анализа и синтеза робастных анизотропийных регуляторов для дискретных дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Результаты, полученные в данной главе, основаны на обобщениях результатов синтеза субоптимальных регуляторов, представленных в третьей главе. Все результаты сформулированы в терминах матричных неравенств, а также получены выпуклые ограничения для решения задач анализа и синтеза. Отдельно решена задача синтеза \mathcal{H}_∞ робастного регулятора по состоянию. Полученные условия позволяют уменьшить консерватизм получаемых оценок в определенных случаях, что невозможно при решении непосредственно задачи анизотропийного анализа и синтеза. Также решена задача робастного модального управления с анизотропийным критерием качества. Вычислительная эффективность проверена на примерах.

Глава 5 посвящена вопросам анизотропийного анализа и синтеза в параметрически неопределенных обыкновенных системах. Рассматриваются два типа параметрических неопределенностей: политопические и ограниченные по норме неопределенности. Для обоих типов неопределенностей получены условия ограниченности анизотропийной нормы сверху заданным положительным числом, а также разработаны вычислительные методики оценки верхней границы анизотропийной нормы параметрически неопределенной системы. В случае политопических систем были разработаны методики на основе параметрических функций Ляпунова, а также на основе вычислительных процедур без неопределенного параметра. Также получены регулярные методы синтеза стабилизирующих робастных регуляторов с анизотропийным критерием качества как по состоянию, так и по выходной переменной. Результаты проиллюстрированы на примерах.

Глава 1. Основные понятия анизотропийной теории и теории дескрипторных систем

Настоящая глава посвящена краткому изложению основных методов из теории дескрипторных систем, а также из теории анизотропийного управления. Следует заметить, что данные положения являются общеизвестными и получены не автором диссертации, поэтому они приводятся в обзорной форме без доказательств с указанием соответствующих источников цитирования.

1.1. Основные понятия теории дескрипторных систем

В общем случае дескрипторная система записывается в виде следующей зависимости:

$$\mathbf{F}(\dot{x}(t), x(t), f(t), t) = 0, \quad (1.1)$$

с уравнением выхода

$$\mathbf{h}(x(t), t) = 0, \quad (1.2)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $f(t) \in \mathbb{R}^m$ — входной сигнал, $\mathbf{F}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{h}(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ — некоторые нелинейные вектор-функции.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, алгебро-дифференциальные или дескрипторные системы не разрешимы относительно первой производной $\dot{x}(t)$.

Наиболее хорошо изученными в настоящее время являются дескрипторные системы, задаваемые в так называемых специальных формах. Линейная ста-

ационарная система также является одной из специальных форм описания дескрипторных систем и имеет вид:

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bf(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Df(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если в уравнении (1.3) матрица E является вырожденной, т.е. $\text{rank}(E) < n$, то алгебраические связи между переменными не позволяют разрешить исходные уравнения относительно производной. Невозможность обратить матрицу E не дает перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Таким образом, в теории дескрипторных систем появилось понятие, называемое мерой неразрешенности системы. Мера неразрешенности или индекс алгебро-дифференциальной системы — это число, которое рассматривается относительно входного сигнала и, в зависимости от объекта изучения, может содержать в себе различные свойства алгебро-дифференциальных систем [90, 100, 101, 102, 139, 151, 152, 155, 156, 169, 170, 172, 193, 224, 219, 220, 221, 215, 216, 218, 223].

Замечание 1.1. *Дескрипторные системы непрерывного времени вида*

$$E_c\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c f(t)$$

могут быть дискретизованы в дескрипторные системы дискретного времени вида

$$E_d\tilde{x}(k+1) = A_d\tilde{x}(k) + B_d\tilde{f}(k)$$

с матрицами:

$$E_d = E_c, \quad A_d = T_s A_c + E_c, \quad B_d = T_s B_c.$$

Здесь T_s — шаг дискретизации.

В дальнейшем объектом рассмотрения будут выступать линейные дискретные дескрипторные системы, поэтому запишем их в пространстве состояний в

следующем виде:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bf(k), \quad (1.4)$$

$$y(k) = Cx(k) + Df(k), \quad (1.5)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $f(k) \in \mathbb{R}^m$ и $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — входная и выходная последовательности соответственно, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. E, A, B, C, D — постоянные действительные матрицы соответствующих размерностей. Также выполняется ранговое ограничение $\text{rank } E = r < n$.

Также для простоты и удобства систему (1.4)–(1.5) будем обозначать в виде:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} E & \begin{array}{c} A \\ C \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} B \\ D \end{array} \end{array} \right]. \quad (1.6)$$

Вид математической модели системы управления зависит от выбора переменных состояния. Очевидно, что такой выбор не является единственным. Это приводит к тому, что математическая модель объекта управления не является единственной.

Две системы $\left[\begin{array}{c|c} E & \begin{array}{c} A \\ C \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} B \\ D \end{array} \end{array} \right]$ и $\left[\begin{array}{c|c} \bar{E} & \begin{array}{c} \bar{A} \\ \bar{C} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \bar{B} \\ \bar{D} \end{array} \end{array} \right]$ называются системами ограниченной эквивалентности если существуют такие две невырожденные матрицы \bar{W} и \bar{V} размерности $n \times n$, что

$$E = \bar{W} \bar{E} \bar{V}, \quad A = \bar{W} \bar{A} \bar{V}, \quad B = \bar{W} \bar{B}, \quad C = \bar{C} \bar{V}$$

При этом пара матриц (\bar{W}, \bar{V}) называется эквивалентным преобразованием. При рассмотрении линейных стационарных дескрипторных систем важным понятием является понятие регулярности системы или регулярности матричного пучка $(\lambda E - A)$, связанного с матрицами состояния системы. В отличие от обыкновенных систем, решение которых существует и единственно при любых начальных условиях, решение дескрипторной системы может быть не единственным или даже не существовать. Необходимым условием существования и единственности решения дескрипторной системы является регулярность матричного пучка $(\lambda E - A)$. Дадим следующее определение [116, 249].

Определение 1.1. Для любых двух заданных матриц $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ пара матриц (E, A) называется регулярной (матричный пучок $(\lambda E - A)$ называется регулярным), если существует постоянный скаляр $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого $\det(\lambda E - A) \neq 0$.

Как показано в [116], пара матриц (E, A) является регулярной если и только если существуют такие две невырожденные матрицы \bar{W} и \bar{V} , что

$$\bar{W}E\bar{V} = \text{diag}(I_r, N), \quad \bar{W}A\bar{V} = \text{diag}(A_1, I_{n-r}), \quad (1.7)$$

где $\text{rank}(E) = r$, $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $N \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ — нильпотент.

Определение 1.2. Квадратная матрица N называется нильпотентом индекса h , если $N^h = 0$, а $N^i \neq 0$ для всех $i = \overline{1, (h-1)}$.

Используя преобразование координат в виде:

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \bar{V}^{-1}x(k), \quad x_1(k) \in \mathbb{R}^r, \quad x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r} \quad (1.8)$$

и умножая левую и правую части уравнения (1.4) на матрицу \bar{W} , получим стандартную декомпозицию системы в виде:

$$x_1(k+1) = A_1x_1(k) + B_1f(k), \quad (1.9)$$

$$y_1(k) = C_1x_1(k),$$

$$Nx_2(k+1) = x_2(k) + B_2f(k), \quad (1.10)$$

$$y_2(k) = C_2x_2(k),$$

$$y(k) = C_1x_1(k) + C_2x_2(k) + Df(k) = y_1(k) + y_2(k) + Df(k), \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{W}E\bar{V} &= \text{diag}(I_r, N), \quad \bar{W}A\bar{V} = \text{diag}(A_1, I_{n-r}), \\ \bar{W}B &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C\bar{V} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Уравнения (1.9)–(1.11) в литературе также называют первой эквивалентной формой, а подсистемы (1.9) и (1.10), соответственно, медленной (прямой) и быстрой (обратной) подсистемами. Индекс матричного пучка $(\lambda E - A)$ или мера неразрешенности системы (1.9)–(1.11) равна индексу нильпотентности матрицы N . В случае, если матрица A_1 записана в жордановой форме, то система (1.9)–(1.11) называется канонической формой Вейерштрасса. Дадим еще одно важное понятие в теории дескрипторных систем.

Определение 1.3. Пусть система записана в форме (1.7), тогда

1. собственные значения матрицы A_1 , называются конечными собственными значениями пары матриц (E, A) .
2. собственные значения матрицы N , называются собственными значениями на бесконечности.

Рассмотрим еще одну важную эквивалентную форму для системы (1.4)–(1.5). Напомним, что $r = \text{rank}(E)$, предполагаем, что пара матриц (E, A) является регулярной. Тогда из теории матриц следует, что можно подобрать такие две невырожденные матрицы \widetilde{W} и \widetilde{V} , что $\widetilde{W}E\widetilde{V} = \text{diag}(I_r, 0)$.

Аналогично предыдущему случаю, применяя преобразование координат $\widetilde{V}^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, $x_1(k) \in \mathbb{R}^r$, $x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, и умножая левую и правую часть уравнения (1.4) на матрицу \widetilde{W} , система (1.4)–(1.5) запишется в виде:

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1f(k), \quad (1.13)$$

$$0 = A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2f(k), \quad (1.14)$$

$$y(k) = C_1x_1(k) + C_2x_2(k) + Df(k), \quad (1.15)$$

где

$$\widetilde{W}A\widetilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{W}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C\widetilde{V} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Система (1.13)–(1.16) называется второй эквивалентной формой или эквивалентной формой, основанной на сингулярной декомпозиции, для системы (1.4)–(1.5).

Матрицы \widetilde{W} и \widetilde{V} могут быть найдены с использованием сингулярной декомпозиции в виде:

$$E = U \operatorname{diag}(S, 0) H^T. \quad (1.17)$$

Здесь U и H — действительные ортогональные матрицы, S — диагональная матрица размерности $r \times r$, которая формируется из ненулевых сингулярных чисел матрицы E

$$\widetilde{W} = \operatorname{diag}(S^{-1}, I_{n-r}) U^T, \quad \widetilde{V} = H. \quad (1.18)$$

Особенности дескрипторных систем

Дискретные дескрипторные системы обладают несколькими особенностями, которые не позволяют быстро и легко обобщить результаты, полученные для обыкновенных систем. Главной такой особенностью является нарушение принципа причинности — текущее состояние системы может зависеть от будущих значений входного сигнала. Поясним это на примере.

Пример 1.1. *Рассмотрим систему:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(k),$$

Система записана в первой эквивалентной форме, а ее решение определяется в виде:

$$\begin{aligned} x_2(k) &= -f(k), \\ x_1(k) &= -f(k) - f(k+1). \end{aligned}$$

Первая переменная состояния зависит от будущих значений входа.

В теории дескрипторных систем выделяют два типа причинности

- Причинность между состоянием и входом. В данном случае система будет причинной, если быстрая (обратная) подсистема не зависит от будущих значений входного сигнала, т.е. если $NB_2 = 0$.
- Причинность между измеряемым выходом и входом. Можно показать, что выходная переменная $y_2(k)$ в выражении (1.10) определяется равенством:

$$y_2(k) = C_2 x_2(k) = - \sum_{i=0}^{h-1} C_2 N^i B_2 f(k+i), \quad (1.19)$$

Таким образом, чтобы выходная переменная не зависела от будущих значений входного сигнала, необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$C_2 N^i B_2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, h-1,$$

или

$$\begin{bmatrix} C_2 & C_2 N & \dots & C_2 N^{h-1} \end{bmatrix}^T N \begin{bmatrix} B_2 & NB_2 & \dots & N^{h-1} B_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (1.20)$$

Другим важным отличием дискретных дескрипторных систем от систем обыкновенных является то, что дескрипторные системы имеют решение не для всех начальных условий. Эта особенность может быть проиллюстрирована, используя выражение для описания зависимости между состоянием системы и входом в нулевой момент времени. Она определяется выражением:

$$x(0) = \bar{V} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \bar{V}^{-1} x(0) - \bar{V} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 f(i)$$

Таким образом, решение существует, если

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \bar{V}^{-1} x(0) = - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B_2 f(i). \quad (1.21)$$

Начальные условия, для которых справедливо равенство (1.21), называют согласованными начальными условиями.

Необходимо отметить, что проблема согласования начальных условий в дескрипторных системах является важной при построении численных решений и моделирования динамики систем. Данные вопросы рассматривались в работах [10, 58, 90, 111].

Определение 1.4. Система (1.4) называется (экспоненциально) устойчивой, если при $f(k) = 0$ и для любых согласованных начальных условий $x(0)$ справедливо неравенство

$$\|x(k)\| \leq \alpha \beta^k \|x(0)\|, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \beta < 1$$

Определение 1.5. Система (1.4) называется допустимой, если она является регулярной (т.е. $\exists \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda E - A) \neq 0$), причинной и устойчивой.

Для системы, записанной в первой и второй эквивалентных формах понятия устойчивости, причинности и допустимости можно представить в следующей форме [273].

Пусть система (1.4)–(1.5) задана в эквивалентной форме (1.9)–(1.12). Тогда

- Система с парой матриц (E, A) является причинной тогда и только тогда, когда $N = 0$.
- Система с парой матриц (E, A) является устойчивой тогда и только тогда, когда $\rho(A_1) < 1$.
- Система с парой матриц (E, A) является допустимой тогда и только тогда, когда $N = 0$ и $\rho(A_1) < 1$.

Пусть система (1.4)–(1.5) задана во второй эквивалентной форме (1.13)–(1.16)

- Система с парой матриц (E, A) является причинной тогда и только тогда, когда матрица A_{22} является невырожденной.

- Система с парой матриц (E, A) является допустимой тогда и только тогда, когда A_{22} является невырожденной и $\rho(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) < 1$.

Определение 1.6. [210] Рассмотрим область \mathfrak{D} на комплексной плоскости, задаваемую в виде:

$$\mathfrak{D} = \{z \in \mathbb{C} : d + 2b\Re(z) + c|z|^2 < 0\}. \quad (1.22)$$

Пару (E, A) будем называть \mathfrak{D} -допустимой, если она является допустимой, а все ее конечные собственные значения лежат внутри области \mathfrak{D} .

В определении 1.6 параметры b , c , и d являются вещественными. Для \mathfrak{D} -допустимой системы они задают круг, лежащий внутри единичного круга на комплексной плоскости.

Управляемость и наблюдаемость дескрипторных систем

Как уже было сказано, стандартная декомпозиция позволяет разделить исходную дескрипторную систему на две подсистемы — прямую и обратную. Пусть система задана на конечном горизонте времени $L \geq n$. При этом решение прямой подсистемы полностью определяется начальными условиями, а обратной подсистемы — конечными условиями [116]. Будем называть такие условия граничными и обозначим их как $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(L) \end{bmatrix}$.

В связи с тем, что динамика дескрипторной системы разделяется на две подсистемы, понятия управляемости и наблюдаемости в дескрипторных системах гораздо шире, чем аналогичные понятия в теории обыкновенных линейных систем. Так, в теории дескрипторных систем выделяют полную управляемость (С-управляемость), управляемость на множестве достижимости (R-управляемость) и причинную управляемость (Y-управляемость). Полная управляемость означает управляемость обеих подсистем в выражении (1.9)–(1.10). Управляемость на множестве достижимости означает управляемость

лишь первой подсистемы (1.9). Остановимся подробнее на причинной управляемости. Рассмотрим закон управления в виде:

$$f(k) = Kx(k) + v(k), \quad (1.23)$$

где $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — постоянная матрица, $v(k)$ — новый входной сигнал, а замкнутая система (1.4) будет иметь вид:

$$Ex(k+1) = (A + BK)x(k) + Bv(k). \quad (1.24)$$

Система (1.4) называется причинно управляемой, если существует такой закон управления (1.23), что замкнутая система (1.24) является причинной. Нарушение принципа причинности при составлении математических моделей реальных систем в дескрипторной форме является достаточно серьезной проблемой при решении задач управления, анализа, идентификации и синтеза наблюдателей состояния, а также создает значительные сложности в обобщении результатов, известных для обыкновенных систем. Свойство причинной управляемости позволяет строить неупреждающие законы управления после применения каузализирующей обратной связи (1.23). Таким образом, причинная управляемость означает управляемость подсистемы (1.10). Эти понятия легко обобщаются на системы, заданные на бесконечном горизонте.

Справедливы следующие критерии управляемости [116, 247]:

1. Система (1.9)–(1.10) является полностью управляемой, если

$$\begin{aligned} \text{rank} [B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{r-1} B_1] &= r, \\ \text{rank} [B_2, NB_2, \dots, N^{n-r-1} B_2] &= n - r. \end{aligned}$$

2. Система (1.9)–(1.10) является управляемой на множестве достижимости, если

$$\text{rank} [B_1, A_1 B_1, \dots, A_1^{r-1} B_1] = r.$$

3. Система (1.9)–(1.10) является причинно управляемой, если

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} = \text{rank}(E) + n.$$

Пример 1.2. Рассмотрим систему с параметрами:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(k),$$

В примере 1.1 было показано, что данная система является неперчинной.

Проверим, является ли она причинно управляемой. Составим матрицу

$$M = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из выражения видно, что $\text{rank}(M) = 3$, следовательно, система является причинно управляемой.

Выберем закон управления по состоянию в виде:

$$u(k) = Kx(k), \quad K = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Выражения для замкнутой системы приобретут вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(k),$$

Из последнего выражения получаем:

$$\begin{aligned} x_2(k+1) &= -0.5x_2(k) + f(k), \\ x_1(k) &= 0.5x_2(k) + f(k), \end{aligned}$$

откуда следует, что система является причинной.

Понятие наблюдаемости, аналогично с теорией обыкновенных систем, является двойственным понятием к управляемости. Поэтому для дескрипторных систем справедливы понятия полной наблюдаемости, наблюдаемости на множестве достижимости и причинной наблюдаемости. Аналогично критериям управляемости, можно выделить критерии наблюдаемости [116, 247]:

1. Система (1.9)–(1.10) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{r-1} \end{bmatrix} = r \text{ and } \text{rank} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 N \\ \vdots \\ C_2 A^{n-r-1} \end{bmatrix} = n - r.$$

2. Система (1.9)–(1.10) R-наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{r-1} \end{bmatrix} = r.$$

3. Система (1.9)–(1.10) причинно наблюдаема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + \text{rank}(E).$$

Определение 1.7. Рациональная матричная функция $P(z) = C(zE - A)^{-1}B + D$ называется передаточной функцией дискретной дескрипторной системы (1.4)–(1.5). Здесь z – переменная Z-преобразования Лапласа.

Определение 1.8. Предположим, что пара матриц (E, A) устойчива. Вве-

дем обозначение

$$F_k = \begin{cases} \bar{V}^{-1} \begin{bmatrix} J^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{W}^{-1}, & k = 0, 1, 2, \dots \\ \bar{V}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -N^{-k-1} \end{bmatrix} \bar{W}^{-1}, & k = -1, -2, \dots \end{cases}$$

где матрицы \bar{W} и \bar{V} задают эквивалентную форму Вейерштрасса системы (1.4)–(1.5) с матрицами J и N .

1. Причинный грамиан управляемости системы (1.4)–(1.5) определяется в виде

$$G_{dcc} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k B B^T F_k^T, \quad (1.25)$$

2. Причинный грамиан наблюдаемости системы (1.4)–(1.5) определяется в виде

$$G_{dco} = O_+ O_+^T = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^T C^T C F_k, \quad (1.26)$$

1. Непричинный грамиан управляемости системы (1.4)–(1.5) определяется в виде

$$G_{dnc} = \sum_{k=-h}^{-1} F_k B B^T F_k^T. \quad (1.27)$$

2. Непричинный грамиан наблюдаемости системы (1.4)–(1.5) определяется в виде

$$G_{dco} = \sum_{k=-h}^{-1} F_k^T C^T C F_k. \quad (1.28)$$

Грамиан управляемости системы (1.4)–(1.5) определяется по формуле $G_{dc} = G_{dcc} + G_{dnc}$, а ее грамиан наблюдаемости равен $G_{do} = G_{dco} + G_{dno}$.

1.2. Анизотропия случайного вектора и средняя анизотропия сигнала

Ниже будут рассмотрены основные понятия из теории анизотропийного анализа сигналов и динамических систем, введенные в работах [15, 16, 17, 19, 119, 174, 266, 267].

Пусть $W = \{w_k\}_{-\infty < k < \infty}$ — стационарная последовательность случайных векторов $w_k \in \mathbb{R}^m$ с конечными вторыми моментами. Составим элементы последовательности W , рассматриваемые на временном интервале $[0, N]$, в случайный вектор вида

$$W_{0:N} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Предполагаем, что $W_{0:N}$ является абсолютно непрерывно распределенным для любых $N \geq 0$. Анизотропия вектора $W_{0:N}$ обозначается через $\mathbf{A}(W_{0:N})$ и определяется как минимальное значение относительной энтропии (информационное уклонение Кульбака-Лейблера) по отношению к вектору из $\mathbb{R}^{m(N+1)}$ эталонным вероятностным распределением, роль которого исполняет гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей. Анизотропия вектора $W_{0:N}$ вычисляется по формуле [266]

$$\mathbf{A}(W_{0:N}) = \frac{m(N+1)}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m(N+1)} \mathbf{E}(|W_{0:N}|^2) \right) - h(W_{0:N}),$$

где дифференциальная энтропия $h(W_{0:N})$ вычисляется в виде

$$h(W_{0:N}) = -\mathbf{E} \ln f(W_{0:N}) = - \int_{\mathbb{R}^{m(N+1)}} f(x) \ln f(x) dx,$$

а $f(x)$ — функция плотности вероятности вектора $W_{0:N}$.

Отметим также, что информационное уклонение Кульбака-Лейблера является неотрицательным функционалом. Таким образом, анизотропия случайного

вектора также является неотрицательным числом, т.е. $\mathbf{A}(W_{0:N}) \geq 0$. Также следует отметить, что $\mathbf{A}(W_{0:N}) = 0$ если и только если $W_{0:N}$ — гауссовский вектор с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей.

Средняя анизотропия последовательности W определяется как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N})}{N}. \quad (1.30)$$

В работе [19] показано, что

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \mathbf{A}(w_0) + \mathbf{I}(w_0; \{w_k\}_{k<0}), \quad (1.31)$$

где $\mathbf{I}(w_0; \{w_k\}_{k<0}) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \mathbf{I}(w_0; W_{s:-1})$ — взаимная информация Шэннона [148] между w_0 и всей предысторией $\{w_k\}_{k<0}$ последовательности W .

Для стационарной гауссовской последовательности W взаимная информация Шэннона между w_0 и всей предысторией $\{w_k\}_{k<0}$ определяется по формуле

$$\mathbf{I}(w_0; \{w_k\}_{k<0}) = \frac{1}{2} \ln \det(\mathbf{cov}(w_0)\mathbf{cov}(\tilde{w}_0)^{-1}), \quad (1.32)$$

где

$$\tilde{w}_0 = w_0 - \mathbf{E}(w_0 | \{w_k\}_{k<0}) \quad (1.33)$$

ошибка оптимального среднеквадратичного предсказания w_0 по предыстории $(w_k)_{k<0}$, вычисляемая через условное математическое ожидание.

Спектральная плотность $S(\omega)$ последовательности W связана с ковариационной матрицей ошибки предсказания (1.33) по формуле Колмогорова-Сеге:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det S(\omega) d\omega = \ln \det \mathbf{cov}(\tilde{w}_0). \quad (1.34)$$

Спектральную плотность $S(\omega)$ можно представить в виде факторизации $S(\omega) = \widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega)$, $(-\pi \leq \omega \leq \pi)$, $\widehat{G}(\omega) = \lim_{l \rightarrow 1} G(le^{i\omega})$.

С учетом изложенных понятий средняя анизотропия последовательности W может быть определена в частотной области с использованием спектральной плотности как

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2} d\omega = -\frac{1}{4\pi} \ln \det \frac{m\mathbf{cov}(\tilde{w}_0)}{\|G\|_2^2}, \quad (1.35)$$

где

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr} \left(\widehat{G}^*(\omega) \widehat{G}(\omega) \right) d\omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr} S(\omega) d\omega \right)^{1/2}.$$

Замечание 1.2. Пусть V — гауссовский белый шум с единичной ковариационной матрицей и нулевым математическим ожиданием. Так как спектральная плотность последовательности V постоянна и равна единичной матрице, то последовательность W может быть сформирована из гауссовского белого шума V посредством фильтра $G(z)$, т.е. $W = GV$. Таким образом, факторизацию $G(z)$ будем называть формирующим фильтром.

Замечание 1.3. Средняя анизотропия стационарной случайной последовательности W может также полностью определяться через факторизацию ее спектральной плотности $\widehat{G}(\omega)$ и ассоциированной с ней передаточной функцией $G(z)$, поэтому в дальнейшем будем использовать обозначение $\overline{\mathbf{A}}(G)$ вместо $\overline{\mathbf{A}}(W)$ там, где это удобнее.

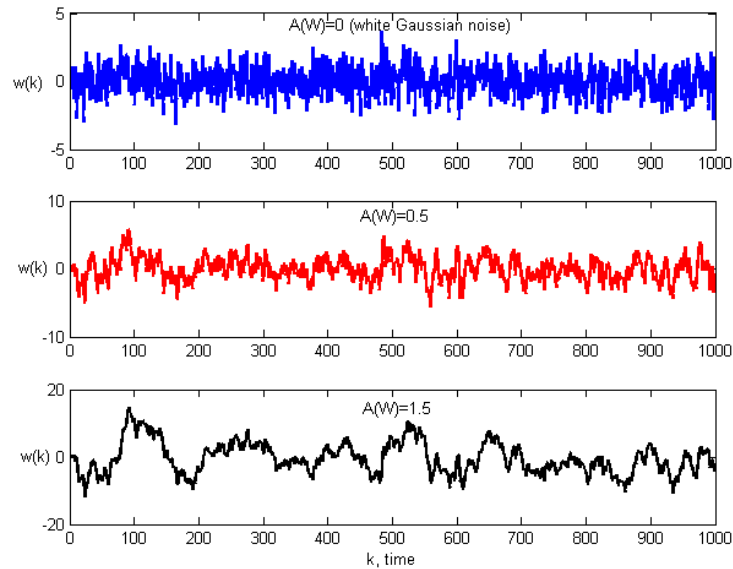


Рис. 1.1. Пример реализации стационарных случайных последовательностей с разными уровнями средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W)$.

Рассмотрим обыкновенную разностную систему $F(z)$:

$$x(k+1) = \mathcal{A}x(k) + \mathcal{B}w(k), \quad (1.36)$$

$$y(k) = \mathcal{C}x(k) + \mathcal{D}w(k). \quad (1.37)$$

Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ и $y(k) \in \mathbb{R}^p$. Передаточная функция системы имеет вид:

$$F(z) = \mathcal{C}(zI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}.$$

Для вход-выходного соотношения (1.36)–(1.37) введем среднеквадратичный коэффициент усиления, определяемый соотношением [119, 267]:

$$Q(F, W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}, \quad (1.38)$$

где

$$\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \mathbf{E}|y(k)|^2}$$

— мощностная норма последовательности $Y = \{y(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Определение 1.9. Для заданного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ анизотропийная норма системы F с реализацией в пространстве состояний (1.36)–(1.37) определяется выражением

$$\|F\|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a} Q(F, W). \quad (1.39)$$

Таким образом, анизотропийная норма системы $\|F\|_a$ описывает стохастический коэффициент усиления системы F по отношению к стационарному внешнему возмущению W , чья средняя анизотропия не превышает заданный уровень a .

Отношение мощностных норм, задаваемое выражением (1.38) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}} = \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2},$$

где $G(z)$ — это формирующий фильтр, ассоциированный с факторизацией спектральной плотности последовательности W . Используя эту запись, анизотропную норму системы можно определить другим образом [119, 267].

Определение 1.10. Для заданного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ анизотропная норма системы F с реализацией в пространстве состояний (1.36)–(1.37) определяется выражением

$$\|F\|_a = \sup_{G \in \mathbf{G}_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2}. \quad (1.40)$$

Здесь через \mathbf{G}_a обозначается множество всех формирующих фильтров, для которых справедливо неравенство

$$\mathbf{G}_a = \{G \in \mathcal{H}_2^{m \times m} : \bar{\mathbf{A}}(G) \leq a\}.$$

Определение 1.11. Фильтр $G \in \mathbf{G}_a$, на котором достигается супремум отношения в правой части выражения (1.40), называется наилучшим формирующим фильтром.

1.3. Вспомогательные результаты, используемые в диссертации

Определение 1.12. Система $\mathcal{F}(z)$, удовлетворяющая условиям $\mathcal{F}^*(z)\Psi\mathcal{F}(z) = \bar{\Psi}$ для некоторой ненулевой матрицы $\Psi = \Psi^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ и невырожденной матрицы $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ на единичной окружности, т.е. при $|z| = 1$ [261], называется взвешенной системой полного пропускания. При этом предполагается, что выполнено условие $m \leq p$.

Лемма о взвешенной системе полного пропускания.

Лемма 1.1. [261] Для заданных матриц Ψ и $\bar{\Psi}$ система $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ является взвешенной системой полного пропускания, если существует матрица

$\mathcal{R} = \mathcal{R}^T$, которая удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\mathcal{R} = \mathcal{A}^T \mathcal{R} \mathcal{A} + \mathcal{C}^T \Psi \mathcal{C}, \quad (1.41)$$

$$0 = \mathcal{B}^T \mathcal{R} \mathcal{A} + \mathcal{D}^T \Psi \mathcal{C}, \quad (1.42)$$

$$\bar{\Psi} = \mathcal{B}^T \mathcal{R} \mathcal{B} + \mathcal{D}^T \Psi \mathcal{D}. \quad (1.43)$$

Критерий допустимости системы на основе обобщенных уравнений Ляпунова.

Теорема 1.1. [247] Регулярная дискретная дескрипторная система (1.4) является допустимой, если существует решение $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обобщенного уравнения Ляпунова

$$A^T X A - E^T X E + Q = 0, \quad (1.44)$$

удовлетворяющее условию $E^T X E \geq 0$ для некоторой положительно определенной матрицы $Q = Q^T > 0$.

Частотная теорема об ограниченности \mathcal{H}_∞ нормы дескрипторной системы [273].

Теорема 1.2. Для заданного числа $\gamma > 0$ дискретная дескрипторная система $P(z) = C(zE - A)^{-1}B + D$ с реализацией в пространстве состояний (1.4)–(1.5) является допустимой, а норма ее передаточной функции удовлетворяет неравенству $\|P\|_\infty < \gamma$, если и только если существует такая матрица $R = R^T$, для которой выполнены неравенства:

$$E^T R E \geq 0, \quad (1.45)$$

$$\begin{bmatrix} A^T R A - E^T R E + C^T C & A^T R B + C^T D \\ B^T R A + D^T C & B^T R B + D^T D - \gamma^2 I_m \end{bmatrix} < 0 \quad (1.46)$$

Лемма 1.2. [231] Пусть область \mathfrak{D} , определяемая выражением (1.22), — диск с центром в начале координат комплексной плоскости, имеющий радиус $\omega < 1$, т.е. $d = -\omega^2$, $b = 0$, и $c = 1$. Пара (E, A) имеет g конечных собственных

значений внутри области \mathfrak{D} и $(n - g)$ конечных собственных значений вне области \mathfrak{D} , если и только если существует невырожденная матрица $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с g положительными и $(n - g)$ отрицательными собственными числами, удовлетворяющая неравенству

$$-\omega^2 E X E^T + A X A^T < 0. \quad (1.47)$$

Лемма 1.3. (Лемма Петерсена) [213] Пусть матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q \times n}$ являются ненулевыми, а $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Неравенство

$$G + M \Delta N + N^T \Delta^T M^T \leq 0 \quad (1.48)$$

выполняется для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$: $\Delta^T \Delta \leq I_p$ если существует такой положительный скаляр $\varepsilon > 0$, что выполнено неравенство

$$G + \varepsilon M M^T + \frac{1}{\varepsilon} N^T N \leq 0. \quad (1.49)$$

Лемма 1.4. (Лемма о дополнении Шура) [89]

Пусть

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix},$$

где X_{11} и X_{22} — квадратные матрицы.

Если $X_{11} > 0$, то $X > 0$ тогда и только тогда, когда

$$X_{22} - X_{12}^T X_{11}^{-1} X_{12} > 0. \quad (1.50)$$

Если $X_{22} > 0$, то $X > 0$ тогда и только тогда, когда

$$X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T > 0. \quad (1.51)$$

Лемма 1.5. (Анизотропийная частотная теорема) [31] Система (1.36)–(1.37) является устойчивой и ее анизотропийная норма для заданного уровня средней анизотропии входного случайного сигнала $a \geq 0$ ограничена сверху

числом $\gamma > 0$, если и только если найдутся такие матрицы $X > 0$, $Y > 0$, $\Psi > 0$ и число $\eta : \eta > \gamma^2$, для которых справедливы соотношения:

$$\eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2, \quad (1.52)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B & -Y & \star \\ D & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (1.53)$$

$$\begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A & B & -Y & \star \\ C & D & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (1.54)$$

$$XY = I_n \quad (1.55)$$

Выводы к главе 1

В этой главе были рассмотрены основные понятия теории дискретных дескрипторных систем. Было показано, что в отличие от обыкновенных систем, дескрипторные системы обладают свойствами и особенностями, которые существенно осложняют обобщение существующих результатов. Показано, что в дескрипторных системах нарушается принцип причинности, решение может не существовать при любых начальных условиях, а также что дескрипторные системы имеют несколько типов управляемости и наблюдаемости. Устойчивость дескрипторных систем определяется в смысле Ляпунова. Во втором разделе кратко приведены основы анизотропийной теории. Анизотропия случайного вектора определяется как минимальное информационное отклонение его распределения от гауссовских распределений с нулевым математическим ожиданием и скалярными ковариационными матрицами. Средняя анизотропия случайной гауссовской последовательности может быть вычислена с использованием факторизации спектральной плотности сигнала в частотной области. В третьем разделе кратко приводятся основные леммы и теоремы, которые потребуются в дальнейшем изложении. Эти формулировки опираются на изложенные в текущей главе понятия. Среди них понятие взвешенной системы полного пропускания, лемма о принадлежности конечных полюсов дескрипторной системы окружности заданного радиуса на комплексной плоскости, лемма о дополнении Шура, а также лемма Петерсена.

Глава 2. Анизотропийный анализ дескрипторных систем с точно известными параметрами

Данная глава посвящена решению задачи оценки робастного качества допустимой дескрипторной системы по отношению к случайным внешним возмущениям с известным уровнем средней анизотропии. Рассматриваются общие методы и алгоритмы для решения задачи анализа как на основе решений обобщенных алгебраических уравнений Риккати, так и с использованием методов выпуклой оптимизации и линейных матричных неравенств.

2.1. Нормы передаточной функции дескрипторной системы

Прежде чем перейти непосредственно к постановке и решению задачи анизотропийного анализа дескрипторных систем, рассмотрим близкие задачи \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ анализа. Для этого необходимо дать определения \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ норм передаточной функции дескрипторной системы. Напомним, что в пространстве состояний дескрипторная система записывается в виде:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad (2.1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k). \quad (2.2)$$

Систему (2.1)–(2.2) также можно представить в частотной области через

передаточную функцию, которая выражается равенством

$$P(z) = C(zE - A)^{-1}B + D.$$

Рассмотрим определения \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ норм передаточной функции $P(z)$ дескрипторной системы (2.1)–(2.2) [247].

$\mathbb{L}_2^{p \times m}$ и \mathcal{H}_2 нормы

Обозначим через $\mathbb{L}_2^{p \times m}(\Gamma)$, где Γ — единичная окружность на комплексной плоскости, пространство матричных функций $P : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}$, которые имеют конечную $\mathbb{L}_2^{p \times m}(\Gamma)$ норму, определяемую выражением

$$\|P\|_{\mathbb{L}_2^{p \times m}(\Gamma)} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} (P^*(e^{i\omega})P(e^{i\omega})) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

Обозначим через $\mathcal{H}_2^{p \times m}$ подпространство пространства $\mathbb{L}_2^{p \times m}(\Gamma)$, которое состоит из всех рациональных передаточных функций, аналитических вне единичного круга. \mathcal{H}_2 норма передаточной функции $P(z) \in \mathcal{H}_2^{p \times m}$ будет определяться как

$$\|P\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} (P^*(e^{i\omega})P(e^{i\omega})) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|P(e^{i\omega})\|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $P(z)$ строго правильная, и конечные обобщенные собственные числа матричного пучка $(\lambda E - A)$ лежат внутри единичного круга, то $P(z) \in \mathcal{H}_2^{p \times m}$. С другой стороны, если $P(z) \in \mathcal{H}_2^{p \times m}$, то $P(z)$ строго правильная, но конечные обобщенные собственные числа матричного пучка $(\lambda E - A)$ необязательно лежат внутри единичного круга.

Напомним, что рациональная передаточная функция называется правильной, если степень числителя не превосходит степени знаменателя, а строго правильной, если степень числителя строго меньше степени знаменателя.

Алгоритм вычисления \mathcal{H}_2 нормы дескрипторной системы достаточно трудоемкий, так как он связан с вычислением по отдельности причинного и непринчин-

ного грамианов управляемости (наблюдаемости). Для вычисления \mathcal{H}_2 нормы дескрипторной системы необходимо решить обобщенное проекционное уравнение Ляпунова относительно грамиана управляемости (наблюдаемости) [247]:

$$\begin{aligned} AG_{dc}A^T - EG_{dc}E^T &= -P_l BB^T P_l^T + (I - P_l)BB^T(I - P_l)^T, \\ G_{dc} &= (I - P_r)G_{dc}(I - P_r)^T \end{aligned} \quad (2.4)$$

или

$$\begin{aligned} A^T G_{do}A - E^T G_{do}E &= -P_r^T C^T C P_r + (I - P_r)^T C^T C (I - P_r), \\ G_{do} &= (I - P_l)^T G_{do}(I - P_l), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$P_r = \bar{V}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{V}, \quad P_l = \bar{W} \begin{bmatrix} I_{n_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{W}^{-1} \quad (2.6)$$

— спектральные проекции матричного пучка $(\lambda E - A)$ на левое и правое корневые подпространства, а матрицы \bar{W} и \bar{V} определяются выражениями (1.7).

Тогда \mathcal{H}_2 норма дескрипторной системы может быть вычислена как $\|P\|_2^2 = \text{tr}(B^T G_{do}B) = \text{tr}(CG_{dc}C^T)$.

Однако если система (2.1)–(2.2) является допустимой, то алгоритм вычисления \mathcal{H}_2 может быть упрощен. Методика состоит из следующих шагов:

1. Вычисляются матрицы W_1 и V_1 , с помощью которых исходная система преобразуется во вторую эквивалентную форму (1.13)–(1.16), где

$$W_1 A V_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

2. Вычисляются матрицы W_2 и V_2 по следующим формулам:

$$W_2 = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

3. Определяются матрицы $\bar{W} = W_1 W_2$ и $\bar{V} = V_1 V_2$. Матрицы \bar{W} и \bar{V} преобразуют исходную систему в первую эквивалентную форму

$$\begin{aligned} \bar{W} E \bar{V} &= \text{diag}(I_r, 0), \quad \bar{W} A \bar{V} = \text{diag}(A_1, I_{n-r}), \\ \bar{W} B &= \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}, \quad C \bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Затем решается дискретное уравнение Ляпунова

$$A_1^T G_{co} A_1 - G_{co} = -\bar{C}_1^T \bar{C}_1. \quad (2.7)$$

Наконец, \mathcal{H}_2 норма системы вычисляется по формуле

$$\|P\|_2 = \sqrt{\text{tr} \left(\bar{B}_1^T G_{co} \bar{B}_1 + (D - \bar{C}_2 \bar{B}_2)^T (D - \bar{C}_2 \bar{B}_2) \right)}.$$

Данная методика легко алгоритмируется, так как использует известные методы линейной алгебры. Рассмотрим работу алгоритма на следующем примере.

Пример 2.1. Пусть матрицы системы равны:

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}, & A &= \begin{bmatrix} 0.7 & -3.25 & -0.7 & 0 \\ 1.8 & 0.4 & -6.4 & 2.6 \\ 1 & -1.9 & -5.4 & 2.4 \\ -0.6 & -2.7 & 5.4 & -2.8 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 2.1 & -0.8 \\ 0.2 & 1 \\ 1.5 & 1.3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицы \bar{W} и \bar{V} можно найти в виде:

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2.2847 & -2.1209 \\ 0 & 1 & 1.4593 & 5.2108 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1713 & -0.2585 & -3.2481 & 0.6194 \\ -0.1705 & -0.0758 & -1.7412 & 1.1245 \end{bmatrix},$$

Система преобразуется в первую эквивалентную форму как

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2371 & -0.8616 \\ -0.0031 & -0.5371 \end{bmatrix}, \quad \bar{W}B = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4428 & -6.0760 \\ -5.6722 & 12.7570 \\ -0.2187 & 0.0877 \\ -0.6087 & 2.4927 \end{bmatrix},$$

$$C\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1568 & 0.1570 & | & 3.0786 & 0.5697 \end{bmatrix}.$$

Решение G_{co} уравнения (2.7) имеет вид:

$$G_{co} = \begin{bmatrix} 0.0260 & 0.0173 \\ 0.0173 & 0.0843 \end{bmatrix}.$$

Наконец, получаем, что $\|P\|_2 = 4.4$.

$\mathbb{L}_\infty^{p \times m}$ и \mathcal{H}_∞ нормы

Пусть $\mathbb{L}_\infty^{p \times m}(\Gamma)$ — пространство матричных функций вида $P : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^{p \times m}$, которые существенно ограничены на Γ . Пространством $\mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ обозначим подпространство пространства $\mathbb{L}_\infty^{p \times m}(\Gamma)$, которое состоит из рациональных передаточных функций, аналитических вне замкнутого единичного круга. \mathcal{H}_∞ норма передаточной функции $P(z) \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ определяется по формуле

$$\|P\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma}(P(e^{i\omega})) = \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \|P(e^{i\omega})\|_2.$$

Вычисление \mathcal{H}_∞ нормы допустимой системы

Условия теоремы 1.2 можно использовать для вычисления \mathcal{H}_∞ нормы допустимой системы. Вводя обозначение $\xi = \gamma^2$, проблема вычисления \mathcal{H}_∞ нормы может быть сформулирована как задача выпуклой оптимизации вида:

$$\xi_* = \min \xi$$

на множестве переменных

$$\{\xi, \tilde{R}\},$$

удовлетворяющих неравенствам (1.45)–(1.46). Если минимум ξ_* найден, то \mathcal{H}_∞ норма системы P может быть найдена как

$$\|P\|_\infty \approx \sqrt{\xi_*}. \quad (2.8)$$

Пример 2.2. Вычислим \mathcal{H}_∞ норму для системы с параметрами, заданными в примере 2.1 с использованием вышеописанной оптимизационной процедуры на основе теоремы 1.2. Полученное значение \mathcal{H}_∞ нормы системы равно $\gamma = 9.0478$, а матрица R , имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} 0.1120 & -9.0655 & 5.1750 & -5.6424 \\ -9.0655 & -12.2041 & 13.4356 & -1.5472 \\ 5.1750 & 13.4356 & 11.4013 & 5.1043 \\ -5.6424 & -1.5472 & 5.1043 & 2.8984 \end{bmatrix}.$$

Анизотропийная норма

Рассмотрим допустимую дескрипторную систему P с реализацией в пространстве состояний:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad (2.9)$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k), \quad (2.10)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — входное возмущение, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход системы. Также предполагаем, что $\text{rank}(E) = r \leq n$.

$W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ стационарная гауссовская последовательность, состоящая из m -мерных случайных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ($a \geq 0$) и нулевым математическим ожиданием.

Определение анизотропийной нормы дескрипторной системы в частотной области аналогично определению 1.10. Напомним его.

Определение 2.1. Для заданной величины уровня средней анизотропии $a \geq 0$ анизотропийная норма системы P с реализацией в пространстве состоя-

ний (2.9)–(2.10) определяется выражением

$$\|P\|_a = \sup_{G \in \mathbf{G}_a} \frac{\|PG\|_2}{\|G\|_2} = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}[\Lambda(\omega)S_w(\omega)] d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr} S_w(\omega) d\omega}. \quad (2.11)$$

Здесь $\Lambda(\omega) = \widehat{P}^*(\omega)\widehat{P}(\omega)$, $S_w(\omega) = \widehat{G}(\omega)\widehat{G}^*(\omega)$, где $(-\pi \leq \omega \leq \pi)$, $\widehat{G}(\omega) = \lim_{l \rightarrow 1} G(le^{i\omega})$.

\mathbf{G}_a — множество формирующих фильтров, определяемых выражением

$$\mathbf{G}_a = \{G \in \mathcal{H}_2^{m \times m} : \overline{\mathbf{A}}(G) \leq a\}.$$

Вычисление анизотропийной нормы допустимой системы

Пусть система P с реализацией в пространстве состояний (2.9)–(2.10) является допустимой, то существуют такие невырожденные матрицы \widetilde{W} и \widetilde{V} , что

$$\widetilde{W}E\widetilde{V} = \text{diag}(I_r, 0).$$

Таким образом, система (2.9)–(2.10) преобразуется во вторую эквивалентную форму в виде:

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1w(k), \quad (2.12)$$

$$0 = A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2w(k), \quad (2.13)$$

$$y(k) = C_1x_1(k) + C_2x_2(k) + Dw(k), \quad (2.14)$$

где матрица A_{22} в выражении (2.13) является невырожденной. Матрицы \widetilde{W} и \widetilde{V} могут быть найдены из сингулярной декомпозиции (1.17) and (1.18). Невырожденность матрицы A_{22} позволяет явно выразить вектор $x_2(k)$ из уравнения (2.13) как

$$x_2(k) = -A_{22}^{-1}(A_{21}x_1(k) + B_2w(k)). \quad (2.15)$$

Подстановка (2.15) в выражения (2.12) и (2.14) приводит к выражению

$$x_1(k+1) = \widetilde{A}x_1(k) + \widetilde{B}w(k), \quad (2.16)$$

$$y(k) = \widetilde{C}x_1(k) + \widetilde{D}w(k) \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, & \tilde{B} &= B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \\ \tilde{C} &= C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}, & \tilde{D} &= D - C_2A_{22}^{-1}B_2.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Полученная система (2.16)–(2.17) эквивалента исходной дескрипторной системе (2.9)–(2.10) в смысле вход-выходного соотношения. Вектор $x_1(k)$ имеет меньшую размерность и представляет собой состояние обыкновенной системы.

Сформулируем теорему, позволяющую точно вычислить анизотропийную норму допустимой дескрипторной системы.

Теорема 2.1. [61] Пусть система P с реализацией в пространстве состояний (2.9)–(2.10) является допустимой. Тогда ее анизотропийная норма совпадает с анизотропийной нормой обыкновенной системы с реализацией в пространстве состояний (2.16)–(2.17) и рассчитывается по формуле

$$\|P\|_a = \left(\frac{1}{q} \left(1 - \frac{m}{\text{tr}(L\Pi L^T + \Sigma)} \right) \right)^{1/2},$$

где $q \in [0, \|P\|_\infty^{-2})$, а матрицы Π , L и Σ находятся из решения системы уравнений, которые включают в себя:

алгебраическое уравнение Риккати:

$$\begin{aligned}R &= \tilde{A}^T R \tilde{A} + q \tilde{C}^T \tilde{C} + L^T \Sigma^{-1} L, \\ L &= \Sigma (\tilde{B}^T R \tilde{A} + q \tilde{D}^T \tilde{C}), \\ \Sigma &= (I_m - \tilde{B}^T R \tilde{B} - q \tilde{D}^T \tilde{D})^{-1}\end{aligned}$$

уравнение Ляпунова:

$$\Pi = (\tilde{A} + \tilde{B}L)\Pi(\tilde{A} + \tilde{B}L)^T + \tilde{B}\Sigma\tilde{B}^T,$$

уравнение специального вида:

$$a = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m \Sigma}{\text{tr}(L\Pi L^T + \Sigma)} \right).$$

Матрицы \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} определяются из соотношений (2.18).

Заметим, что при вычислении анизотропийной нормы системы используется понятие наихудшего формирующего фильтра — факторизации спектральной плотности входного возмущения W , на котором достигается супремум соотношения (2.11). Параметры наихудшего формирующего фильтра могут быть найдены из следующего соотношения

$$G = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} + \tilde{B}L & \tilde{B}\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array} \right].$$

Пример 2.3. Вычислим анизотропийную норму системы, приведенной в примере 2.1.

Для данной системы имеем: $\text{rank}(E) = 2$. Для преобразования исходной системы во вторую эквивалентную форму можно выбрать матрицы

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} -0.5228 & 0.3220 & -0.1338 & -0.7779 \\ -0.5233 & -0.4659 & -0.6595 & 0.2723 \\ 0.1736 & 0.7599 & -0.5536 & 0.2932 \\ -0.6501 & 0.3190 & 0.4906 & 0.4846 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} -0.0292 & -0.1028 & -0.7935 & 0.1742 \\ 0.0328 & -0.1669 & 0.4113 & 0.2662 \\ -0.0413 & 0.0427 & 0.2347 & 0.8396 \\ 0.0705 & 0.0601 & -0.3822 & 0.4403 \end{bmatrix},$$

которые преобразуют матрицу E к представлению

$$\tilde{W}E\tilde{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A переписывается в виде:

$$\widetilde{W}A\widetilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.5249 & -0.8132 & -0.4367 & 2.1266 \\ -0.4712 & 0.0136 & 4.1626 & -6.9268 \\ \hline -0.0338 & -0.0947 & -0.4369 & 0.2406 \\ 0.0993 & -0.0792 & -0.6765 & 1.2619 \end{array} \right].$$

Легко проверить, что матрица A_{22} является невырожденной, поэтому система причинная. Спектральный радиус матрицы $\widetilde{A} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ равен $\rho(\widetilde{A}) = 0.5405 < 1$. Таким образом, система является допустимой и может быть преобразована к обыкновенной эквивалентной системе пониженной размерности с параметрами

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \begin{bmatrix} 0.2371 & -0.8616 \\ -0.0031 & -0.5371 \end{bmatrix}, & \widetilde{B} &= \begin{bmatrix} -0.4428 & -6.0760 \\ -5.6722 & 12.7570 \end{bmatrix}, \\ \widetilde{C} &= \begin{bmatrix} 0.1568 & 0.1570 \end{bmatrix}, & \widetilde{D} &= \begin{bmatrix} 2.0200 & -0.6900 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\widetilde{W}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -1.2341 & -0.9895 & & \\ -2.1814 & -0.3600 & & \\ \hline -0.2187 & 0.0877 & & \\ -0.6087 & 2.4927 & & \end{array} \right],$$

$$C\widetilde{V} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0.1094 & -0.1795 & -1.7304 & 1.4597 \end{array} \right].$$

Далее применяем теорему 2.1 для вычисления анизотропийной нормы $\|P\|_a$ исходной системы при разных уровнях средней анизотропии a . Результаты вычисления анизотропийной нормы представлены в виде графика зависимости значения нормы от уровня средней анизотропии a на рис. 2.1. Для случая, когда $a = 0$ значение анизотропийной нормы равно

$$\|P\|_a = 3.1112 = \frac{4.4}{\sqrt{2}} = \frac{\|P\|_2}{\sqrt{2}}.$$

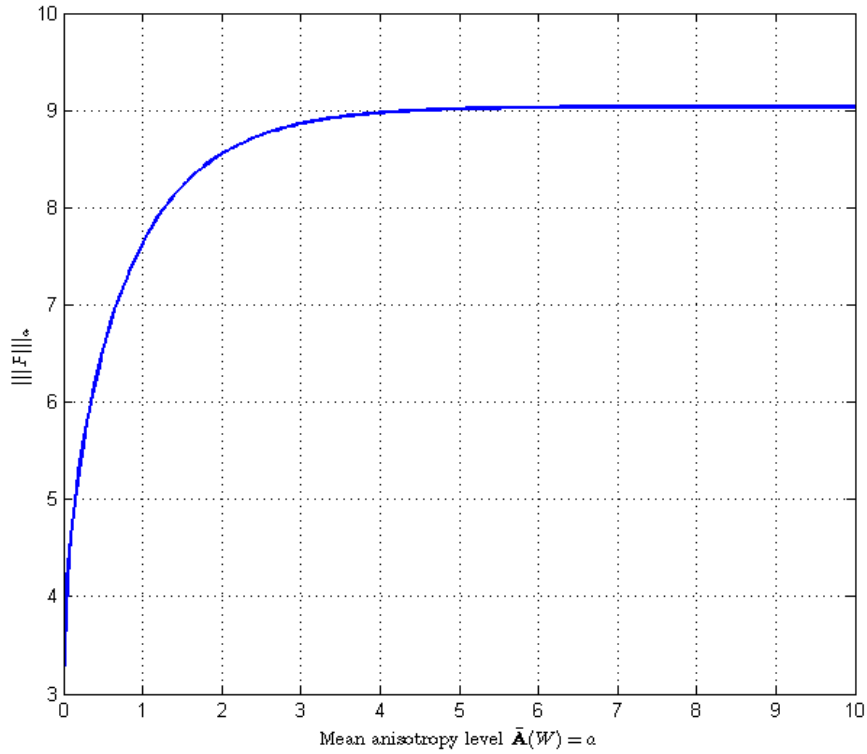


Рис. 2.1. Зависимость анизотропийной нормы системы P от уровня средней анизотропии a входного возмущения.

Следует отметить также, что рассмотренные выше \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ и анизотропийные нормы являются конечными и для не причинных дескрипторных систем. Так, задача вычисления \mathcal{H}_2 нормы устойчивой не причинной системы сводится к решению проекционных обобщенных уравнений Ляпунова для поиска причинного и не причинного грамианов управляемости (наблюдаемости). Насколько известно автору диссертации, задача вычисления \mathcal{H}_∞ не причинной устойчивой системы имеет решение только в частотной области [143]. Предлагаемый некоторыми исследователями подход с умножением матричной передаточной функции не причинной дескрипторной системы на z^{-h} , где h — индекс неразрешенности системы, хотя и сохраняет величины \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ и анизотропийных норм системы, но нарушает эквивалентность операторов систем при переходе из частотной области во временную. Этот факт в дальнейшем делает невозможным применение существующих для обыкновенных систем методов синтеза анизотропийных регуляторов, так как эти задачи в настоящее время решены только

во временной области. Именно этот факт служит основной мотивацией для разработки новых методов анизотропийного анализа дескрипторных систем.

2.2. Общая постановка задачи анизотропийного анализа

Рассмотренный выше алгоритм вычисления анизотропийной нормы является удобным только в том случае, если известно, что исследуемая система является допустимой. На практике предпочтительным является одновременная проверка допустимости системы и вычисление или оценка ее анизотропийной нормы. Более того, предложенный алгоритм содержит матричные преобразования, которые не могут быть выполнены при решении задачи синтеза анизотропийных регуляторов. Исходя из вышесказанного, естественным образом возникает задача поиска таких условий, которые одновременно могут сказать, допустима ли система и удовлетворяет ли она заданным ограничениям на анизотропийную норму. Ниже мы приведем такие результаты с использованием двух подходов: техники, основанной на решении обобщенного алгебраического уравнения Риккати, и техники, основанной на выпуклой оптимизации и матричных неравенствах. Рассмотрим общую постановку задачи.

Пусть дескрипторная система задана в виде:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad (2.19)$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k), \quad (2.20)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайная стационарная последовательность с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ($a \geq 0$), $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, E , A , B , C и D — известные действительные матрицы соответствующих размерностей. Матрица E предполагается вырожденной, т.е. $\text{rank}(E) = r < n$.

Здесь и далее в главе будем предполагать, что выполнено следующее ран-

говое ограничение для системы (2.19):

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = \text{rank}(E). \quad (2.21)$$

Система (2.19)–(2.20) ассоциируется с передаточной функцией, определяемой по формуле

$$P(z) = C(zE - A)^{-1}B + D.$$

Также для удобства будем использовать следующее обозначение:

$$P = \left[\begin{array}{c|c} E & B \\ \hline C & D \end{array} \right].$$

Задача 2.1. *Входная последовательность W — стационарная гауссовская случайная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. Предполагается, что известны скалярные величины $a \geq 0$ и $\gamma > 0$. Требуется проверить, является ли система (2.19)–(2.20) допустимой и выполнено ли неравенство $\|P\|_a \leq \gamma$.*

2.3. Анизотропийный анализ на основе Риккати подхода

Прежде чем представить результаты по анизотропийному анализу дескрипторных систем с использованием Риккати подхода, необходимо получить дополнительные условия, определяющие систему полного пропускания. Система с передаточной функцией $P(z)$ называется системой полного пропускания, если $P^*P = I_m$ на единичной окружности, т.е. при $|z| = 1$ [261].

Лемма 1.1 определяет необходимые и достаточные условия, при выполнении которых обыкновенная система $\mathcal{F}(z)$ является взвешенной системой полного пропускания. Обобщим это понятие на класс дескрипторных систем.

Рассмотрим дескрипторную систему P :

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \quad (2.22)$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k). \quad (2.23)$$

Предположим, что выполнены следующие ранговые условия:

$$\text{rank}(E) = \text{rank} \begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} E^T & C^T \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Лемма 2.1. *Допустимая система (2.22)–(2.23) является системой полного пропуска, если существует матрица $\tilde{R} = \tilde{R}^T$, удовлетворяющая условию $E^T \tilde{R} E \geq 0$ и являющаяся решением следующей системы уравнений:*

$$B^T \tilde{R} B + D^T D = I, \quad (2.25)$$

$$B^T \tilde{R} A + D^T C = 0, \quad (2.26)$$

$$A^T \tilde{R} A + C^T C - E^T \tilde{R} E = 0. \quad (2.27)$$

Доказательство. Для допустимой дескрипторной системы всегда существуют такие две матрицы \bar{W} и \bar{V} , которые преобразуют систему (2.22)–(2.23) в эквивалентную форму

$$C\bar{V} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{W}E\bar{V} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{W}A\bar{V} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \bar{W}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь $r = \text{rank}(E)$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$. Ранговое ограничение (2.24) эквивалентно следующему

$$\text{rank}(\bar{W}E\bar{V}) = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{W}E\bar{V} & \bar{W}B \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{W}E\bar{V} & \bar{V}^T C^T \end{bmatrix}.$$

Это означает, что

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} I & 0 & C_1^T \\ 0 & 0 & C_2^T \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$B_2 = 0, \quad C_2 = 0. \quad (2.28)$$

Представим матрицу \tilde{R} в следующем виде:

$$\tilde{R} = \bar{W}^T R \bar{W} = \bar{W}^T \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \bar{W}. \quad (2.29)$$

Подставим \tilde{R} из выражения (2.29) в (2.27), получим

$$A^T \bar{W}^T R \bar{W} A + C^T C - E^T \bar{W}^T R \bar{W} E = 0. \quad (2.30)$$

Умножая слева и справа на невырожденные матрицы \bar{V}^T и \bar{V} соответственно, имеем

$$\bar{V}^T A^T \bar{W}^T R \bar{W} A \bar{V} + \bar{V}^T C^T C \bar{V} - \bar{V}^T E^T \bar{W}^T R \bar{W} E \bar{V} = 0. \quad (2.31)$$

Выражение (2.31) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

или

$$\begin{bmatrix} A_1^T R_{11} A_1 & A_1^T R_{12} \\ R_{21} A_1 & R_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T C_2 \\ C_2^T C_1 & C_2^T C_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.33)$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} A_1^T R_{11} A_1 + C_1^T C_1 - R_{11} &= 0, & A_1^T R_{12} + C_1^T C_2 &= 0, \\ R_{21} A_1 + C_2^T C_1 &= 0, & R_{22} + C_2^T C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Теперь рассмотрим выражение (2.26): $B^T \bar{W}^T R \bar{W} A + D^T C = 0$. Умножая справа на \bar{V} , получаем

$$B_1^T R_{11} A_1 + D^T C_1 = 0, \quad (2.35)$$

$$B_1^T R_{12} + D^T C_2 = 0. \quad (2.36)$$

Используя аналогичные преобразования для (2.25), имеем

$$B_1^T R_{11} B_1 + B_1^T R_{12} B_2 + B_2^T R_{22} B_2 + D^T D = I. \quad (2.37)$$

Учитывая условия (2.28), выражения (2.34)–(2.37) эквивалентны следующим:

$$A_1^T R_{11} A_1 + C_1^T C_1 - R_{11} = 0, \quad (2.38)$$

$$B_1^T R_{11} A_1 + D^T C_1 = 0, \quad (2.39)$$

$$B_1^T R_{11} B_1 + D^T D = I. \quad (2.40)$$

Таким образом, мы показали, что исходная дескрипторная система эквивалента обыкновенной системе с параметрами

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_1 x_1(k) + B_1 u(k), \\ y(k) &= C_1 x_1(k) + D u(k), \end{aligned}$$

для которой условия (2.34), (2.35), (2.37) совпадают с аналогичными условиями леммы 1.1 в случае, если $\Psi = I_p$ и $\bar{\Psi} = I_m$. Таким образом, система (2.22)–(2.23), удовлетворяющая ранговому ограничению (2.24) и уравнениям (2.25)–(2.27), является системой полного пропускания. ■

Сформулируем анизотропийную частотную теорему на основе уравнения Риккати.

Теорема 2.2. Пусть $P \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ – допустимая система с представлением в пространстве состояний (2.19)–(2.20). Для заданных скалярных величин $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ анизотропийная норма системы ограничена сверху числом γ , т.е. $\|P\|_a \leq \gamma$, тогда и только тогда, когда существует такое число $q \in [0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty^{-2})]$, для которого справедливо неравенство

$$-\frac{1}{2} \ln \det \left((1 - q\gamma^2) \Sigma \right) \geq a, \quad (2.41)$$

где матрица Σ связана со стабилизирующим¹ решением $\hat{R} = \hat{R}^T$ обобщенного

¹Стабилизирующим решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати (2.42) будем называть матрицу \hat{R} , для которой пара $(E, A + BL)$ является допустимой.

алгебраического уравнения Риккати

$$E^T \widehat{R}E = A^T \widehat{R}A + qC^T C + L^T \Sigma^{-1} L, \quad (2.42)$$

$$L = \Sigma(B^T \widehat{R}A + qD^T C), \quad (2.43)$$

$$\Sigma = (I_m - B^T \widehat{R}B - qD^T D)^{-1}, \quad (2.44)$$

с дополнительным условием

$$E^T \widehat{R}E \geq 0.$$

Доказательство. Отношение мощностных норм $\|PG\|_2/\|G\|_2$ в правой части выражения (2.11) и анизотропийный функционал $\overline{\mathbf{A}}(G)$, определяемый выражением (1.35), являются инвариантными по отношению к умножению на ортогональные матрицы и действительное ненулевое число формирующего фильтра G . Для заданной системы P они полностью определяются нормированной спектральной плотностью [174]:

$$\Pi(\omega) = \frac{mS(\omega)}{\|G\|_2^2} = \frac{2\pi mS(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} S(v) dv}, \quad (2.45)$$

тогда

$$\overline{\mathbf{A}}(G) = \alpha(\Pi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \Pi(\omega) d\omega, \quad (2.46)$$

и

$$\frac{\|PG\|_2^2}{\|G\|_2^2} = \nu(\Pi) = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(\Lambda(\omega)\Pi(\omega)) d\omega. \quad (2.47)$$

Функция $\Pi(\omega)$, определенная на полуинтервале $[-\pi, \pi)$, принимает значения из множества положительно определенных эрмитовых матриц размерности $m \times m$ и удовлетворяют условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} \Pi(\omega) d\omega = 2\pi m.$$

Зададим функцию $\Lambda(\omega)$ в следующем виде:

$$\Lambda(\omega) = \widehat{P}^*(\omega)\widehat{P}(\omega). \quad (2.48)$$

Отметим также, что функционал $\nu(\Pi)$ является линейным по переменной $\Pi(\omega)$, а $\alpha(\Pi)$ строго выпуклый по $\Pi(\omega)$. Строгая выпуклость функционала α следует из строгой выпуклости функции $\ln \det(\cdot)$, рассматриваемой на выпуклом конусе положительно определенных матриц [30]. Также строгая выпуклость $\alpha(\Pi)$ может быть получена прямым вычислением второй вариации:

$$\begin{aligned} \delta^2 \alpha(\Pi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(\Pi^{-1}(\omega) \delta \Pi(\omega) \Pi^{-1}(\omega) \delta \Pi(\omega)) d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Pi^{-1/2}(\omega) \delta \Pi(\omega) \Pi^{-1/2}(\omega)\|_F^2 d\omega, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где $\delta \Pi(\omega)$ — вариация Π , а $\|M\|_F = (\text{tr}(M^* M))^{1/2}$ означает фробениусову норму матрицы. В выражении (2.49) было использовано выражение для вычисления первой вариации обратной невырожденной матрицы

$$\delta(\Xi^{-1}) = -\Xi^{-1}(\delta \Xi)\Xi^{-1},$$

а также свойство следа матрицы

$$\ln \det \Xi = \text{tr} \ln \Xi.$$

Таким образом, минимальное значение средней анизотропии входного возмущения W , которое необходимо, чтобы достичь величины $\gamma > 0$ определяется выражением

$$\min_{\nu(\Pi) \geq \gamma} \alpha(\Pi) = -\frac{1}{4\pi} \max_{\nu(\Pi) \geq \gamma^2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \Pi(\omega) d\omega. \quad (2.50)$$

Используя метод множителей Лагранжа, можно показать, что первый минимум в выражении (2.50) достигается при спектральной плотности, пропорциональной

$$S_q(\omega) = (I_m - q\Lambda(\omega))^{-1}, \quad (2.51)$$

где q — вспомогательная переменная, находящаяся в диапазоне $0 \leq q < \|P\|_{\infty}^{-2}$.

Введем функции

$$\mathcal{A}(q) = \alpha(\Pi_q), \quad \mathcal{N}(q) = \sqrt{\nu(\Pi_q)}, \quad (2.52)$$

которые определяются функционалами $\alpha(\Pi)$ и $\nu(\Pi)$ из выражений (2.46) и (2.47) на нормированной спектральной плотности

$$\Pi_q(\omega) = \frac{2\pi m S_q(\omega)}{\int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} S_q(v) dv}, \quad (2.53)$$

полученной подстановкой (2.51) в выражение (2.45). Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда функция Λ в выражении (2.48) является постоянной матрицей. Тогда обе функции $\mathcal{A}(q)$ и $\mathcal{N}(q)$ являются строго возрастающими по параметру q (см. [119, 267]). Этот факт позволяет вычислить минимальное значение средней анизотропии в выражении (2.50) по формуле $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma))$, где $\mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ обозначает обратную функцию для $\mathcal{N}(q)$. Следовательно, неравенство $\| \|P\| \|_a \leq \gamma$ эквивалентно неравенству $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geq a$. Таким образом, из выражения (2.51) следует, что $\Lambda(\omega) = (I_m - S_q(\omega)^{-1})/q$ и

$$\frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} (\Lambda(\omega) S_q(\omega)) d\omega = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} S_q(\omega) d\omega - 1 \right),$$

что совместно с определением функции $\mathcal{N}(q)$ через (2.47), (2.52) и (2.53) дает нам

$$\frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} S_q(\omega) d\omega = \frac{1}{1 - q\mathcal{N}^2(q)}. \quad (2.54)$$

Подставляя (2.46), (2.53) и (2.54) в выражение (2.52), получаем функцию $\mathcal{A}(q)$ в форме

$$\mathcal{A}(q) = \mathfrak{A}(q, \mathcal{N}(q)), \quad (2.55)$$

где

$$\mathfrak{A}(q, \gamma) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det S_q(\omega) d\omega - \frac{m}{2} \ln(1 - q\gamma^2). \quad (2.56)$$

Так как функция $-\ln(1 - q\gamma^2)$ монотонно возрастает по $\gamma \in [0, 1/\sqrt{q}]$, то это же справедливо и для функции $\mathfrak{A}(q, \gamma)$. Следует отметить также, что функция $\mathfrak{A}(q, \gamma)$ достигает своего максимального значения по q в точке $q = \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$, где согласно выражению (2.55), она совпадает с функцией $\mathcal{A}(q)$:

$$\max_{0 \leq q < \|P\|_\infty^{-2}} \mathfrak{A}(q, \gamma) = \mathfrak{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma), \gamma) = \mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)). \quad (2.57)$$

Важность этого свойства при доказательстве критерия ограниченности анизотропийной нормы системы, т.е. $\|P\|_a \leq \gamma$, объясняется тем, что из выражения (2.57) следует эквивалентность между выполнением неравенства $\mathcal{A}(\mathcal{N}^{-1}(\gamma)) \geq a$ и существованием параметра $q \in [0, \|P\|_\infty^{-2})$, удовлетворяющего неравенству $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$. Следовательно, $\|P\|_a \leq \gamma$, если $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$ для некоторого $q \in [0, \|P\|_\infty^{-2})$.

Свойство (2.57) проверяется с помощью дифференцирования функции $\mathfrak{A}(q, \gamma)$ из выражения (2.56) по переменной q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}(q, \gamma)}{\partial q} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \ln \det(I_m - q\Lambda(\omega))}{\partial q} d\omega + \frac{m\gamma^2}{2(1 - q\gamma^2)} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}(\Lambda(\omega)S_q(\omega)) d\omega + \frac{m\gamma^2}{2(1 - q\gamma^2)} = -\frac{m\mathcal{N}^2(q)}{2(1 - q\mathcal{N}^2(q))} + \frac{m\gamma^2}{2(1 - q\gamma^2)} = \\ &= \frac{m(\gamma^2 - \mathcal{N}^2(q))}{2(1 - q\gamma^2)(1 - q\mathcal{N}^2(q))}. \quad (2.58) \end{aligned}$$

Функция $\mathcal{N}(q)$ является строго монотонной, а из представления (2.58) следует, что $\frac{\partial \mathfrak{A}(q, \gamma)}{\partial q}$ является положительной при $q < \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$ и отрицательной при $q > \mathcal{N}^{-1}(\gamma)$. Теперь необходимо представить неравенство $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$ для функции (2.56) во временной области для системы P . Напомним, что выражение (2.51) описывает множество наихудших спектральных плотностей входного возмущения W для допустимых значений переменной q . Так как вспомогательная переменная q предполагается фиксированной для оставшейся части доказательства, введем следующее обозначение

$$S_\star(\omega) = (I_m - q_\star \Lambda(\omega))^{-1}, \quad (2.59)$$

где $q_\star = \mathcal{A}^{-1}(a)$.

Приведенная выше часть доказательства аналогично доказательству, представленному в [174], так как в частотной области представление допустимых дескрипторных систем с учетом рангового ограничения (2.21) совпадает с представлением обыкновенных систем.

Теперь получим реализацию в пространстве состояний для наихудшего входного возмущения W_\star со спектральной плотностью S_\star , которая генерируется из гауссовского белого шума с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Учитывая обозначение (2.48), выражение (2.59) можно записать в виде

$$\widehat{\Theta}^*(\omega)\widehat{\Theta}(\omega) = I_m, \quad -\pi \leq \omega < \pi, \quad (2.60)$$

где $\widehat{\Theta} = \begin{bmatrix} \sqrt{q_\star}\widehat{P}(\omega) \\ \widehat{G}_\star^{-1}(\omega) \end{bmatrix}$.

Здесь \widehat{G}_\star — передаточная функция формирующего фильтра для сигнала W , которая согласно [119], определяет наихудшую спектральную плотность (2.59) в виде $S_\star = \widehat{G}_\star\widehat{G}_\star^*$. Условие (2.60) означает, что система $\widehat{\Theta}$ является системой полного пропускания.

Будем искать наихудшее возмущение в виде $W_\star = G_\star V$, где V — гауссовский белый шум. Пусть

$$w_\star(k) = Lx(k) + \Sigma^{1/2}v(k). \quad (2.61)$$

Здесь $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — постоянная матрица, для которой пара $(E, A + BL)$ является допустимой, а $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — положительно определенная матрица. Тогда представление в пространстве состояний для формирующего фильтра G_\star будет иметь вид:

$$G_\star = \left[E, \begin{array}{c|c} A + BL & B\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array} \right].$$

Предположим также, что фильтр G_\star является обратимым, т.е. возможно формально выразить значение входной переменной $v(k)$ через выходную переменную $w(k)$ и параметры фильтра. Тогда обратный фильтр будет иметь следую-

щие параметры

$$G_{\star}^{-1} = \left[E, \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -\Sigma^{-1/2}L & \Sigma^{-1/2} \end{array} \right].$$

Тогда окончательное представление в пространстве состояний для системы Θ определяется выражением:

$$\Theta = \left[E, \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline q^{1/2}C & q^{1/2}D \\ -\Sigma^{-1/2}L & \Sigma^{-1/2} \end{array} \right].$$

Согласно лемме 2.1, можно найти такую матрицу $\widehat{R} = \widehat{R}^T$, удовлетворяющую условию $E^T \widehat{R} E \geq 0$, для которой справедливо

$$B^T \widehat{R} B + \begin{bmatrix} q^{1/2} D^T & (\Sigma^{-1/2})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{1/2} D \\ \Sigma^{-1/2} \end{bmatrix} = I_m, \quad (2.62)$$

$$B^T \widehat{R} A + \begin{bmatrix} q^{1/2} D^T & (\Sigma^{-1/2})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{1/2} C \\ -\Sigma^{-1/2} L \end{bmatrix} = 0, \quad (2.63)$$

$$A^T \widehat{R} A + \begin{bmatrix} q^{1/2} C^T & -L^T (\Sigma^{-1/2})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{1/2} C \\ -\Sigma^{-1/2} L \end{bmatrix} - E^T \widehat{R} E = 0. \quad (2.64)$$

Так как Σ — положительно определенная матрица, то из уравнений (2.62) и (2.63) имеем:

$$\Sigma = (I_m - B^T \widehat{R} B - q D^T D)^{-1}, \quad (2.65)$$

$$L = \Sigma (B^T \widehat{R} A + q D^T C). \quad (2.66)$$

Эти выражения совпадают с выражениями (2.43) и (2.44). Уравнение (2.64) можно переписать в виде:

$$E^T \widehat{R} E = A^T \widehat{R} A + q C^T C + L^T \Sigma^{-1} L. \quad (2.67)$$

Так как наихудшее входное возмущение описывается выражением (2.61), где $\{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, то ошибка предсказания (1.33) равна $\tilde{w}(0) = \Sigma^{1/2} v(0)$, и, следовательно, $\mathbf{cov}(\tilde{w}(0)) = \Sigma$. Таким образом, с учетом формулы Колмогорова-Сеге

(1.34), имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det S_{\star}(\omega) d\omega = \ln \det \Sigma.$$

Учитывая последнее выражение, из (2.56) получаем

$$\mathfrak{A}(q, \gamma) = -\frac{1}{2} \ln \det ((1 - q\gamma^2)\Sigma).$$

Таким образом, условие $\mathfrak{A}(q, \gamma) \geq a$ эквивалентно неравенству (2.41) для матрицы Σ , связанной с обобщенным алгебраическим уравнением Риккати (2.42)–(2.44). Это завершает доказательство. ■

Рассмотрим применение теоремы 2.2 к оценке анизотропийной нормы дескрипторной системы на численном примере.

Пример 2.4. Рассмотрим систему (2.19)–(2.20) со следующими параметрами:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.3500 & 1.0000 & -0.7800 \\ 0.6300 & -0.1100 & 0.9700 \\ 0.6177 & 0.8038 & 0.7851 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0.70 \quad 2.00 \quad -1.56], \quad D = [0.6].$$

Система является допустимой, обобщенный спектральный радиус $\rho(E, A) = 0.9799$, ранговое ограничение (2.21) также выполнено. \mathcal{H}_{∞} норма передаточной функции $\|P\|_{\infty}$ равна 6.8364.

Чтобы удовлетворять условиям теоремы для заданных a и γ , параметр q должен принадлежать интервалу $q \in [0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_{\infty}^{-2})]$ где $\|P\|_{\infty}^{-2} = 0.0214$. Также необходимо выполнение условия $E^T \hat{R} E \geq 0$ для матрицы \hat{R} .

Проверим выполнение условий теоремы для разных значений γ . Анизотропийная норма системы при $a = 0.1$ равна $\|P\|_a = 3.1537$. В таблице 2.1 представлены результаты проверки условий теоремы 2.2 при различных значениях γ .

Таблица 2.1. Проверка выполнения условий теоремы 2.2 при $a = 0.1$

γ	3.170	3.160	3.150
$[0, \min(\gamma^{-2}, \ P\ _{\infty}^{-2})]$	[0, 0.0214)		
q	0.0209	0.0213	-0.0001i+0.0214
$E^T \widehat{R}E$	$\begin{bmatrix} 0.2508 & 0.4703 & 0 \\ 0.4703 & 3.3776 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2538 & 0.4818 & 0 \\ 0.4818 & 3.5087 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0018i + 0.2577 & -0.0123i + 0.4993 & 0 \\ -0.0123i + 0.4993 & -0.1636i + 3.7194 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Численные эксперименты показывают, что для величины $\gamma > \|P\|_a$ все условия теоремы 2.2 выполнены. В случае, если $\gamma < \|P\|_a$, то для данного примера нарушаются условия не только на принадлежность скалярного параметра q заданному интервалу, но также и на неотрицательную определенность матрицы $E^T \widehat{R}E$.

Теорема 2.2 может быть также использована для вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с наперед заданной точностью ε_{\min} . Методика вычисления состоит в итерационном уточнении пороговой величины γ , при которой условия теоремы выполнены. В качестве начального приближения можно использовать значение \mathcal{H}_{∞} нормы дескрипторной системы. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 2.2.

Теорема 2.2 является важной фундаментальной теоремой, так как устанавливает связь между оценкой величины анизотропийной нормы допустимой дескрипторной системы и ее представлением в пространстве состояний без дополнительных преобразований к эквивалентной обыкновенной системе. Этот факт поможет в дальнейшем ставить и решать задачи синтеза в том числе и для непричинных систем.

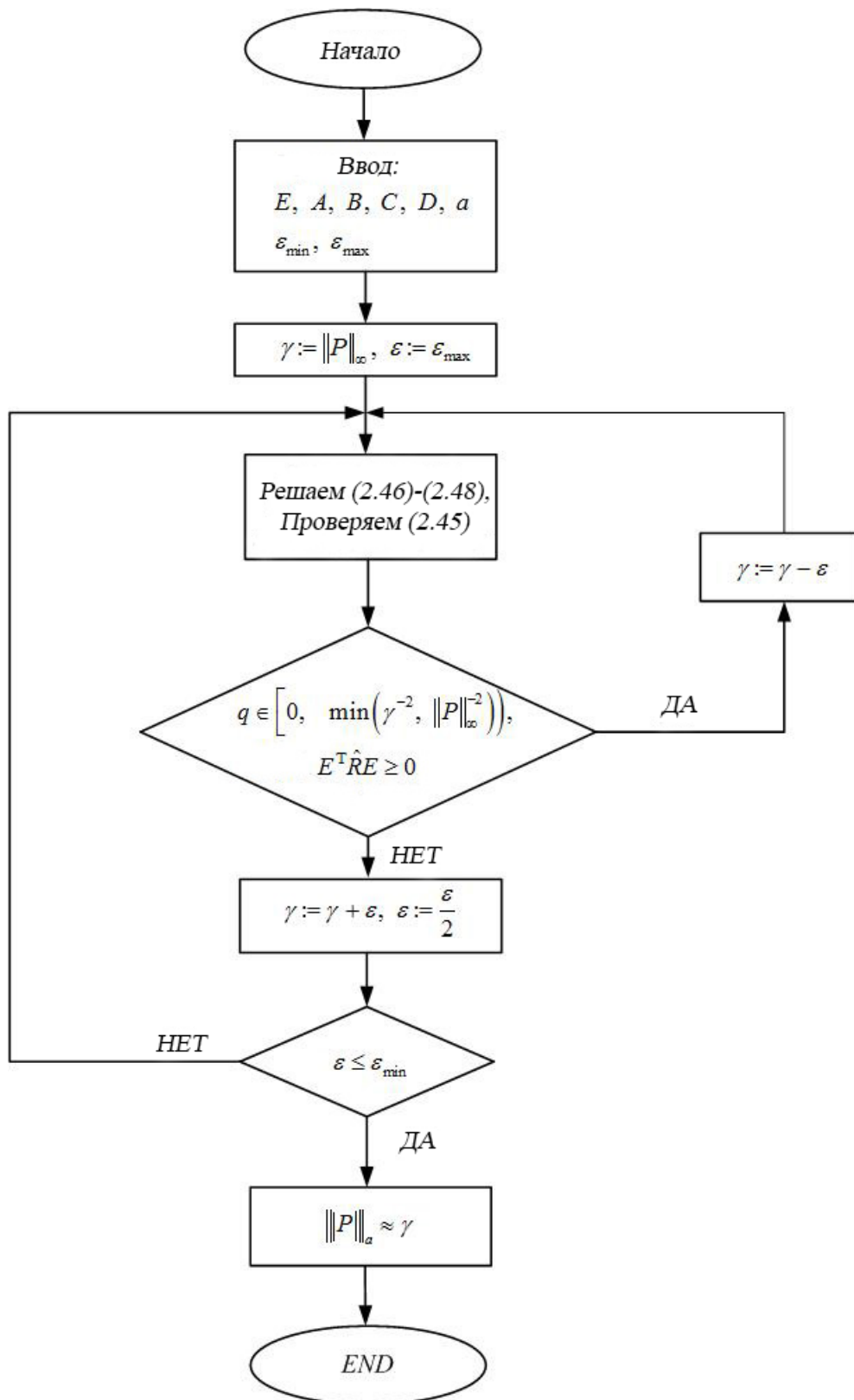


Рис. 2.2. Блок-схема для вычисления анизотропийной нормы системы на основе решения обобщенного алгебраического уравнения Риккати.

2.4. Анизотропийный анализ дескрипторных систем на основе выпуклой оптимизации

Рассмотрим методы анизотропийного анализа дескрипторных систем на основе методов выпуклой оптимизации. Прежде чем сформулировать анизотропийную частотную теорему для дескрипторных систем, предположим, что вместе с (2.21) выполняется следующее условие

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda E & B \\ C & D \end{bmatrix} = n + m. \quad (2.68)$$

Теорема 2.3. Пусть $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — стационарная случайная гауссовская последовательность, средняя анизотропия которой не превосходит заданного числа, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$, где $a \geq 0$. Система P с реализацией в пространстве состояний (2.19)–(2.20) является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена положительным числом $\gamma > 0$, т.е.

$$\|P\|_a < \gamma,$$

если существует такой скалярный параметр $q \in [0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty)]$ и симметрическая матрица R , которые удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} ERE^T &\geq 0, \\ -(\det(I_m - B^T RB - qD^T D))^{1/m} &< -(1 - q\gamma^2)e^{2a/m}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{bmatrix} A^T RA - E^T RE & A^T RB \\ B^T RA & B^T RB - I_m \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0. \quad (2.70)$$

Доказательство. Аналогично теореме 2.2 будем использовать следующие обозначения

$$\Sigma = (I_m - B^T RB - qD^T D)^{-1} \text{ и } L = \Sigma(B^T RA + qD^T C).$$

Воспользуемся свойствами логарифма и преобразуем неравенство (2.41). Получим

$$\begin{aligned} -\ln \det((1 - q\gamma^2)\Sigma) &> 2a, \\ -\ln \det \Sigma - \ln \det(I_m(1 - q\gamma^2)) &> 2a, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} -\ln \det \Sigma &> m \ln(1 - q\gamma^2) + 2a, \\ -1/m \ln \det \Sigma &> \ln \left(e^{2a/m}(1 - q\gamma^2) \right), \\ (\det \Sigma)^{-1/m} &> (1 - q\gamma^2)e^{2a/m}. \end{aligned}$$

Умножая слева и справа на (-1) , окончательно имеем

$$-(\det \Sigma)^{-1/m} < -(1 - q\gamma^2)e^{2a/m}.$$

Покажем теперь, что из выполнения условий теоремы 2.3 также выполняются условия теоремы 2.2. Рассмотрим неравенство (2.70). Раскрывая скобки, блок (2,2) в этом неравенстве можно записать в виде: $\Sigma = (I_m - B^T R B - qD^T D)^{-1}$ или $\Sigma = q(q^{-1}I_m - q^{-1}B^T R B - D^T D)^{-1}$. Учитывая, что $q \in \left[0, \min(\gamma^{-2}, \|P\|_\infty)\right)$, получаем, что $\Sigma > 0$. Используя дополнение по Шуру, неравенство (2.70) может быть переписано в следующем виде:

$$\begin{aligned} A^T R A - E^T R E + qC^T C + \\ + (A R B^T + qC^T D)(I_m - B^T R B - qD^T D)^{-1}(B R A^T + qD^T C) < 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

или с учетом используемых обозначений

$$A^T R A - E^T R E + qC^T C + L^T \Sigma^{-1} L < 0, \quad (2.72)$$

Тогда существует такая матрица $\Xi > 0$, для которой справедливо равенство

$$A^T R A - E^T R E + qC^T C + L^T \Sigma^{-1} L + \Xi = 0. \quad (2.73)$$

Заметим также, что матрица $qC^T C + L^T \Sigma^{-1} L$ является положительно определенной. Следовательно, система является допустимой [248].

Зафиксируем параметр q_* , который удовлетворяет неравенствам (2.69)–(2.70). Так как справедливо неравенство (2.72), то существует такая матрица R_* для которой выполняется равенство

$$A^T R_* A - E^T R_* E + q_* C^T C + (A R_* B^T + q_* C^T D)(I_m - B^T R_* B - q_* D^T D)^{-1} \times \\ \times (B R_* A^T + q_* D^T C) = 0. \quad (2.74)$$

Более того, согласно [279] выполняется неравенство $R < R_*$. Таким образом, R_* является допустимым решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати (2.74). Можно показать, что для фиксированного q_* неравенство (2.69) выполняется для R_* . С учетом рангового условия (2.68), матрицы R и R_* являются стабилизирующими решениями обобщенных алгебраических уравнений Риккати (2.73) и (2.74) соответственно [164]. Таким образом, существует такая пара (q_*, R_*) , которая является решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати (2.42)–(2.44) при условии (2.41). Согласно теореме 2.2, получаем, что $\|P\|_a < \gamma$. Теорема доказана. ■

Следует заметить, что ограничение (2.41) также является выпуклым. Подробный анализ выпуклости можно найти в диссертации [31].

Замечание 2.1. Матричные неравенства (2.69) и (2.70) не могут быть напрямую применены для вычисления минимального значения γ , потому что содержат нелинейность в виде перемножения переменных q и γ^2 в правой части неравенства (2.69).

Преобразуем неравенства (2.69) и (2.70). Введем замену переменных $\eta = q^{-1}$, $\Phi = \eta R$ и $\xi = \gamma^2$. Умножая оба неравенства слева и справа на η а также подставляя ξ вместо γ^2 , условия теоремы 2.3 могут быть переписаны в виде

$$\eta - (e^{-2a} \det(\eta I_m - B^T \Phi B - D^T D))^{1/m} < \xi, \quad (2.75)$$

$$\begin{bmatrix} A^T \Phi A - E^T \Phi E + C^T C & A^T \Phi B + C^T D \\ B^T \Phi A + D^T C & B^T \Phi B + D^T D - \eta I_m \end{bmatrix} < 0, \quad (2.76)$$

$$E^T \Phi E \geq 0. \quad (2.77)$$

Условия (2.75) и (2.76) являются линейными по ξ .

Они позволяют оценить минимальное значение γ с помощью решения задачи выпуклой оптимизации вида $\xi_* = \min \xi$ на множестве переменных $\{\Phi, \eta, \xi\}$, удовлетворяющих условиям (2.75)–(2.77). Если минимальное значение ξ_* найдено, то анизотропийная норма системы P может быть оценена как

$$\|P\|_a \approx \sqrt{\xi_*}.$$

Замечание 2.2. Сделаем еще одно важное замечание. Для каждого допустимого значения q стабилизирующее решение R уравнения Риккати (2.42)–(2.44) единственно, так что существует вполне определенное отображение $q \mapsto R_q$ [31]. Множество тех значений q , для которых пара (q, R_q) удовлетворяет неравенству (2.41), образует интервал $[q_*, q^*]$, концевые точки которого для заданной системы F являются функциями a и γ . Интервал становится множеством, состоящим из единственного элемента $q_* = q^*$ тогда и только тогда, когда $\gamma = \|P\|_a$. Таким образом, для случая $a = 0$ и выполнения равенства $\|P\|_a = \gamma$ получаем, что $q = 0$ и результат замены $\eta = q^{-1}$ не определен. Учитывая, что неравенство (2.75) является строгим, для случая $a = 0$ равенство $\|P\|_a = \gamma$ недостижимо. Откуда следует, что $q \neq 0$ и замена $\eta = q^{-1}$ является корректной для всех $a \geq 0$.

Предельные случаи анизотропийной частотной теоремы

Рассмотрим условия теоремы 2.3 для двух предельных случаев средней анизотропии входной случайной последовательности. Так как масштабированная \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы являются предельными случаями анизотропийной нормы для $a = 0$ и $a \rightarrow \infty$ в частотной области, необходимо проверить, что неравенства (2.69) и (2.70) могут удовлетворять критериям ограниченности масштабированной \mathcal{H}_2 нормы и \mathcal{H}_∞ нормы дескрипторной системы P . Проверим этот

факт.

Докажем вспомогательный результат для вычисления \mathcal{H}_2 нормы дескрипторной системы.

Лемма 2.2. Пусть T — решение следующего обобщенного уравнения Ляпунова

$$A^T T A - E^T T E + C^T C = 0 \quad (2.78)$$

для системы с реализацией в пространстве состояний (2.19)–(2.20). Тогда \mathcal{H}_2 системы (2.19)–(2.20) может быть вычислена по формуле

$$\|P\|_2 = \sqrt{\text{tr}(B^T T B + D^T D)}. \quad (2.79)$$

Доказательство.

В [80] показано, что решение обобщенного проекционного уравнения Ляпунова (2.4) совпадает с решением обобщенного уравнения Ляпунова (2.78), если $B_1 B_2^T = 0$.

Согласно ранговому ограничению (2.21) существует такая матрица \overline{W} , что

$$\overline{W} B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Откуда следует, что $B_2 = 0$ и, следовательно, условие $B_1 B_2^T = 0$ выполнено. Таким образом, решение обобщенного уравнения Ляпунова (2.78) определяет грамиан наблюдаемости системы (2.19)–(2.20). Используя определение \mathcal{H}_2 дескрипторной системы, получаем (2.79). ■

Ниже рассмотрим два предельных случая средней анизотропии входной случайной последовательности, а именно $a = 0$ и $a \rightarrow \infty$.

1. Если $a \rightarrow 0$, то неравенство (2.75) эквивалентно следующему

$$\eta - (\det(\eta I_m - B^T \Phi B - D^T D))^{1/m} < \gamma^2. \quad (2.80)$$

Принимая во внимание отношение между арифметическим и геометрическим средними [83], имеем

$$(\det(\eta I_m - B^T \Phi B - D^T D))^{1/m} \leq \frac{1}{m} \operatorname{tr}(\eta I_m - B^T \Phi B - D^T D).$$

Из неравенства (2.80) следует, что

$$\operatorname{tr}(B^T \Phi B + D^T D) < m\gamma^2. \quad (2.81)$$

Можно проверить, что из выполнения неравенства (2.76), следует выполнение неравенства

$$A^T \Phi A - E^T \Phi E + C^T C < 0. \quad (2.82)$$

Условия (2.81) и (2.82) с учетом (2.77) эквивалентны неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|P\|_2 < \gamma.$$

2. Если $a \rightarrow \infty$, то $\eta \rightarrow \gamma^2$, и неравенство (2.75) становится недействительным. Для $\bar{\Phi} = \gamma\Phi$ можно заметить, что неравенство (2.76) эквивалентно (1.46). Таким образом, при $a \rightarrow \infty$ условие $\|P\|_a < \gamma$ совпадает с условиями частотной теоремы для \mathcal{H}_∞ нормы, т.е. $\|P\|_\infty < \gamma$.

Рассмотренные предельные случаи показывают, что анизотропийная частотная теорема для дескрипторных систем в терминах матричных неравенств согласуется с определением анизотропийной нормы в частотной области.

Пример 2.5. Пусть параметры системы имеют вид

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.7 & -3.25 & -0.7 & 0 \\ 1.8 & 0.4 & -6.4 & 2.6 \\ 1 & -1.9 & -5.4 & 2.4 \\ -0.6 & -2.7 & 5.4 & -2.8 \end{bmatrix},$$

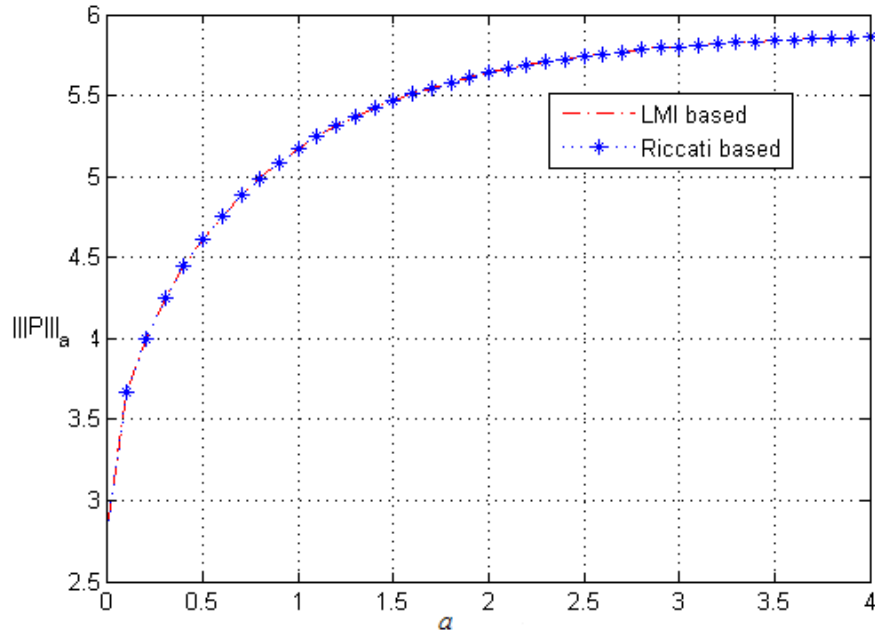


Рис. 2.3. Анизотропийная норма системы с использованием алгоритма на основе теоремы 2.1 и теоремы 2.3.

$$B = \begin{bmatrix} 3.2 & -3.5 \\ 2.5 & -7.9 \\ 3.8 & -7.6 \\ -1.2 & 8.2 \end{bmatrix}, \quad C = [0.2 \ 0.4 \ 0.45 \ 0.6], \quad D = [0.2 \ 1].$$

Ранговое ограничение (2.21) для системы выполнено. Результаты вычисления анизотропийной нормы с использованием метода выпуклой оптимизации, а также технику на основе решения алгебраического уравнения Риккати для эквивалентной обыкновенной системы представлены на рис. 2.3. Рис. 2.4 демонстрирует абсолютную ошибку между полученными величинами. Вычислительный эксперимент показывает, что предложенный алгоритм вычисления анизотропийной нормы на основе выпуклой оптимизации обладает достаточно высокой точностью.

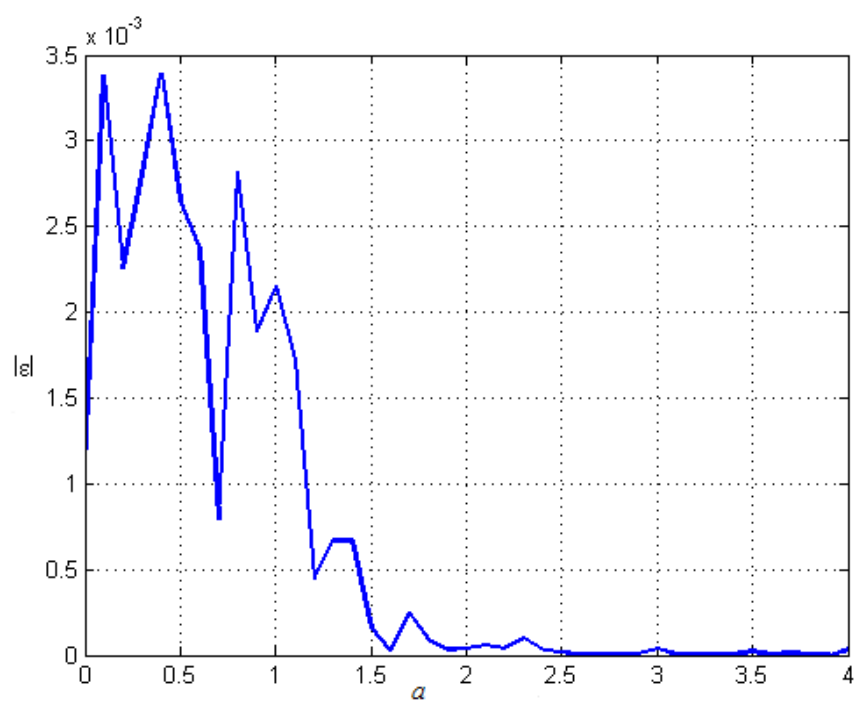


Рис. 2.4. Абсолютная ошибка между методом теоремы 2.1 и теоремы 2.3.

2.5. Модификация анизотропийной частотной теоремы: строгие условия

Результаты, полученные в предыдущем разделе, сформулированы в виде нестрогих матричных неравенств. Это может сказаться на реализации и точности вычисления анизотропийной нормы при использовании алгоритмических процедур. Кроме того, данные условия приводят к нелинейным матричным неравенствам при поиске субоптимального управления. Рассмотрим модифицированную частотную теорему, которая позволяет исправить описанные выше недостатки.

Модифицированная частотная теорема для обыкновенных систем

Прежде чем сформулировать модифицированную анизотропийную частотную теорему для дескрипторных систем, необходимо получить результат для систем обыкновенных. Поэтому рассмотрим обыкновенную систему в пространстве состояний:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad (2.83)$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k), \quad (2.84)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние объекта управления, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайная стационарная последовательность с известным уровнем средней анизотропии $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$, $y(k) \in \mathbb{R}^q$ — измеряемый выход, A , B , C и D — действительные постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Передаточная функция системы (2.83)–(2.84) записывается в виде

$$F(z) = C(zI_m - A)^{-1}B + D.$$

Предположим, что известны скалярные величины $a \geq 0$ и $\gamma > 0$. Проблема анизотропийного анализа заключается в проверке условий:

1. Система (2.83)–(2.84) устойчива;
2. $\|F\|_a < \gamma$.

Ранее в терминах матричных неравенств ответ на вопрос об ограниченности анизотропийной нормы был получен в [258] и известен под как анизотропийная частотная теорема для обыкновенных систем в терминах матричных неравенств. Приведем ее формулировку, так как в дальнейшем она понадобится при доказательстве.

Лемма 2.3. [258] Пусть система (2.83)–(2.84) с передаточной функцией $F(z) \in \mathcal{H}_\infty^{q \times m}$ является устойчивой. Для известных скалярных величин $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ анизотропийная норма ограничена положительным числом γ , т.е.

$$\|F\|_a < \gamma$$

если существуют скаляр $\eta > \gamma^2$ и положительно определенная $n \times n$ -матрица $\Phi = \Phi^T > 0$, для которых справедливы следующие неравенства:

$$\eta - (e^{-2a} \det(\eta I_m - B^T \Phi B - D^T D))^{1/m} < \gamma^2, \quad (2.85)$$

$$\begin{bmatrix} A^T \Phi A - \Phi + C^T C & A^T \Phi B + C^T D \\ B^T \Phi A + D^T C & B^T \Phi B + D^T D - \eta I_m \end{bmatrix} < 0. \quad (2.86)$$

Заметим, что в формулировке леммы 2.3 система (2.83)–(2.84) предполагается устойчивой. Однако ляпуновская часть в неравенстве (2.86) содержит в себе условие проверки устойчивости системы (2.83)–(2.84). Таким образом, лемма 2.3 отвечает сразу на два вопроса: о проверке устойчивости и об ограниченности анизотропийной нормы.

Приведем формулировку модифицированной частотной теоремы для обыкновенных систем.

Теорема 2.4. Для заданных чисел $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ система (2.83)–(2.84) с передаточной функцией $F(z) = C(zI_m - A)^{-1}B + D$ является устойчивой и ее анизотропийная норма ограничена числом γ , т.е.

$$\|F\|_a < \gamma,$$

если существуют $\eta > \gamma^2$, положительно определенная $n \times n$ -матрица $\Phi = \Phi^T > 0$ и произвольная невырожденная $n \times n$ -матрица Y такие, что справедливы следующие неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det(\eta I_m - B^T \Phi B - D^T D))^{1/m} < \gamma^2, \quad (2.87)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^T & YA & YB & \Phi^T - Y^T - \frac{1}{2}Y & 0 \\ A^T Y^T & -\Phi & 0 & A^T Y^T & C^T \\ B^T Y^T & 0 & -\eta I_m & B^T Y^T & D^T \\ \Phi - Y - \frac{1}{2}Y^T & YA & YB & -Y - Y^T & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -I_q \end{bmatrix} < 0. \quad (2.88)$$

Доказательство. Предположим, что неравенства (2.87) и (2.88) выполняются.

Перепишем выражение (2.88) в следующей форме

$$\Xi + \Upsilon^T Y^T \Delta + \Delta^T Y \Upsilon < 0, \quad (2.89)$$

где $\Delta = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix}$, $\Upsilon = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}I_n & A & B & -I_n \end{bmatrix}$, а симметрическая матрица Ξ определяется как

$$\Xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Phi \\ 0 & C^T C - \Phi & C^T D & 0 \\ 0 & D^T C & D^T D - \eta I_m & 0 \\ \Phi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя лемму о проекции [89], получаем что неравенство (2.89) разрешимо для невырожденной $n \times n$ -матрицы Y , если и только если

$$M^T \Xi M < 0 \text{ и } N^T \Xi N < 0$$

для

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ -I_n & 0 & 0 & I_n \end{bmatrix}, \quad N^T = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & -\frac{1}{2}I_n \\ 0 & I_n & 0 & A^T \\ 0 & 0 & I_m & B^T \end{bmatrix}.$$

Кроме того, столбцы матрицы N формируют базис ядра Υ , а столбцы матрицы M формируют базис Δ .

Отметим также, что

$$N^T \Xi N = \begin{bmatrix} -\Phi & \Phi A & \Phi B \\ A^T \Phi & C^T C & C^T D \\ B^T \Phi & D^T C & D^T D \end{bmatrix} < 0. \quad (2.90)$$

Так как $\Phi = \Phi^T > 0$, то используя лемму о дополнении Шура, мы можем преобразовать неравенство (2.90) в

$$\begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} \Phi (-\Phi)^{-1} \Phi \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} < 0.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} A^T \Phi A - \Phi + C^T C & A^T \Phi B + C^T D \\ B^T \Phi A + D^T C & B^T \Phi B + D^T D - \eta I_m \end{bmatrix} < 0.$$

Следовательно, условия теоремы совпадают с условиями леммы 2.3. ■

Замечание 2.3. Чтобы избавиться от произведения матриц $D^T D$ в неравенстве (2.87), представим новую переменную Ψ :

$$\Psi < \eta I_m - B^T \Phi B - D^T D. \quad (2.91)$$

Преобразуем неравенство (2.91) используя лемму о дополнении Шура, получим

$$\Psi - \eta I_m + B^T \Phi B - D^T (-I_q) D < 0,$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m + B^T \Phi B & D^T \\ D & -I_q \end{bmatrix} < 0.$$

Таким образом, неравенство (2.87) может быть переписано в систему неравенств

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2$$

и

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m + B^T \Phi B & D^T \\ D & -I_q \end{bmatrix} < 0.$$

Модифицированная анизотропийная частотная теорема для дескрипторных систем

Рассмотрим теперь дискретную дескрипторную систему (2.19)–(2.20). Предполагаем, что система является регулярной, поэтому для нее существуют такие две невырожденные матрицы \widetilde{W} и \widetilde{V} , с помощью которых система (2.19)–(2.20) может быть представлена во второй эквивалентной форме (1.13)–(1.15). Ниже будем использовать следующие обозначения: $E_d = \widetilde{W} E \widetilde{V}$, $A_d = \widetilde{W} A \widetilde{V}$, $B_d = \widetilde{W} B$, $C_d = C \widetilde{V}$, $D_d = D$.

Сформулируем модифицированную анизотропийную частотную теорему для системы (2.19)–(2.20).

Теорема 2.5. *Для заданных скаляров $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ система (2.19)–(2.20) с передаточной функцией $P(z)$ является допустимой и ее анизотропийная норма ограничена числом γ , т.е.*

$$\|P\|_a < \gamma,$$

если существуют такие матрицы $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и скалярные величины $\eta > \gamma^2$ и $\alpha > 0$, что выполняются следующие неравенства:

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \quad (2.92)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m + B_d^T \Theta B_d & D_d^T \\ D_d & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (2.93)$$

u

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T & \Gamma A_d & \Gamma B_d & L^T - Q^T - \frac{1}{2}Q & 0 \\ A_d^T \Gamma^T & \Pi A_d + A_d^T \Pi^T - \Theta & \Pi B_d & A_d^T \Gamma^T & C_d^T + \alpha A_d^T \Pi^T C_d^T \\ B_d^T \Gamma^T & B_d^T \Pi^T & -\eta I_m & B_d^T \Gamma^T & D_d^T + \alpha B_d^T \Pi^T C_d^T \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^T & \Gamma A_d & \Gamma B_d & -Q - Q^T & 0 \\ 0 & C_d + \alpha C_d \Pi A_d & D_d + \alpha C_d \Pi B_d & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (2.94)$$

$$\text{где } \Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Доказательство.

Предположим, что неравенства (2.92)–(2.94) справедливы. Для второй эквивалентной формы (1.13)–(1.15) системы (2.19)–(2.20) можно получить следующее неравенство

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & 0 \\ z_{12}^T & -L & z_{23} & 0 & z_{25} & z_{26} \\ z_{13}^T & z_{23}^T & z_{33} & z_{34} & z_{35} & z_{36} \\ z_{14}^T & 0 & z_{34}^T & -\eta I_m & z_{45} & z_{46} \\ z_{15}^T & z_{25}^T & z_{35}^T & z_{45}^T & z_{55} & 0 \\ 0 & z_{26}^T & z_{36}^T & z_{46}^T & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0$$

где

$$\begin{aligned} z_{11} &= -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad z_{12} = QA_{11} + RA_{21}, \\ z_{13} &= QA_{12} + RA_{22}, \quad z_{14} = QB_1 + RB_2, \\ z_{15} &= L^T - Q^T - \frac{1}{2}Q, \quad z_{23} = A_{21}^T S^T, \\ z_{25} &= A_{11}^T Q^T + A_{21}^T R^T, \quad z_{26} = C_1^T + \alpha A_{21}^T S^T C_2^T \\ z_{33} &= SA_{22} + A_{22}^T S^T, \quad z_{34} = SB_2, \\ z_{35} &= A_{12}^T Q^T + A_{22}^T R^T, \quad z_{36} = C_2^T + \alpha A_{22}^T S^T C_2^T \\ z_{45} &= B_1^T Q^T + B_2^T R^T, \quad z_{46} = D^T + \alpha B_2^T S^T C_2^T, \end{aligned}$$

$$z_{55} = -Q - Q^T.$$

Так как $Z < 0$, то мы можем выбрать невырожденную матрицу K , для которой будет выполняться неравенство

$$KZK^T < 0.$$

Выберем матрицу K в следующем виде

$$K = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & I_{n-r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда получим

$$KZK^T = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{14} & z_{15} & 0 & z_{13} \\ z_{12}^T & -L & 0 & z_{25} & z_{26} & z_{23} \\ z_{14}^T & 0 & -\eta I_m & z_{45} & z_{46} & z_{34}^T \\ z_{15}^T & z_{25}^T & z_{45}^T & z_{55} & 0 & z_{35}^T \\ 0 & z_{26}^T & z_{46}^T & 0 & -I_p & z_{36}^T \\ z_{13}^T & z_{23}^T & z_{34} & z_{35} & z_{36} & z_{33} \end{bmatrix} < 0.$$

Рассмотрим выражение $KZK^T = W + W^T$ где

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 & w_{24} & w_{25} & w_{26} \\ w_{31} & 0 & w_{33} & w_{34} & w_{35} & w_{36} \\ w_{41} & 0 & 0 & w_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{55} & 0 \\ w_{61} & 0 & 0 & w_{64} & w_{65} & w_{66} \end{bmatrix},$$

$$w_{11} = -\frac{1}{2}Q, w_{21} = w_{24} = A_{11}^T Q^T + A_{21}^T R^T,$$

$$\begin{aligned}
w_{22} &= -\frac{1}{2}L, \quad w_{25} = C_1^T + \alpha A_{21}^T S^T C_2^T, \\
w_{26} &= A_{21}^T S^T, \quad w_{31} = w_{34} = B_1^T Q^T + B_2^T R^T, \\
w_{33} &= -\frac{\eta}{2}I_m, \quad w_{35} = D^T + \alpha B_2^T S^T C_2^T, \\
w_{36} &= B_2^T S^T, \quad w_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^T, \\
w_{44} &= -Q, \quad w_{55} = -\frac{1}{2}I_p, \quad w_{65} = C_2^T + \alpha A_{22}^T S^T C_2^T, \\
w_{61} &= w_{64} = A_{12}^T Q^T + A_{22}^T R^T, \quad w_{66} = A_{22}^T S^T.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$W + W^T < 0. \quad (2.95)$$

Так как $z_{33} = A_{22}^T S^T + S A_{22} < 0$, то обе матрицы A_{22} и S являются невырожденными. Таким образом, система (2.19) является причинной и может быть преобразована в эквивалентную обыкновенную систему \hat{T} меньшей размерности

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}w(k), \quad (2.96)$$

$$\hat{y}(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}w(k), \quad (2.97)$$

где $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^r$,

$$\hat{A} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad \hat{B} = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2,$$

$$\hat{C} = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21}, \quad \hat{D} = D - C_2A_{22}^{-1}B_2.$$

Учитывая во внимание ранговое ограничение, получаем $B_2 = 0$. Тогда неравенство (2.92) совпадает с неравенством (2.87) для эквивалентной системы (2.96)–(2.97).

Теперь покажем, что матрица \hat{A} является шуровой и $\|\hat{T}\|_a < \gamma$. Так как $S A_{22}$ и $A_{22}^T S^T$ обратимые, $A_{22}^T S^T < 0$ и $S A_{22} < 0$, то применяя лемму о дополнении

Шура к выражению (2.95), получим

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T & Q\hat{A} & Q\hat{B} & L^T - Q^T - \frac{1}{2}Q & 0 \\ \hat{A}^T Q^T & -L & 0 & \hat{A}^T Q^T & \hat{C}^T \\ \hat{B}^T Q^T & 0 & -\eta I_m & \hat{B}^T Q^T & \hat{D}^T \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^T & Q\hat{A} & Q\hat{B} & -Q - Q^T & 0 \\ 0 & \hat{C} & \hat{D} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (2.98)$$

Согласно теореме 2.4, получаем, что $\rho(\hat{A}) < 1$ и $\|\hat{T}\|_a < \gamma$. Откуда следует, что $\|P\|_a < \gamma$. ■

Анизотропийная норма дескрипторной системы может быть вычислена с использованием методов выпуклой оптимизации и использованием алгоритма:

Шаг 1. вводим обозначение $\xi = \gamma^2$,

Шаг 2. задаем число $\alpha > 0$,

Шаг 3. решаем следующую оптимизационную задачу

$$\text{найти } \xi_* = \min \xi$$

на множестве $\{L, Q, R, S, \Psi, \eta, \xi\}$, удовлетворяющих неравенствам (2.92)–(2.94).

Если минимум ξ_* найден, то анизотропийная норма системы P вычисляется как

$$\|P\|_a \approx \sqrt{\xi_*}.$$

Рассмотрим пример применения условий теоремы для оценки анизотропийной нормы дескрипторной системы.

Пример 2.6. Пусть параметры системы (2.19)–(2.20) равны

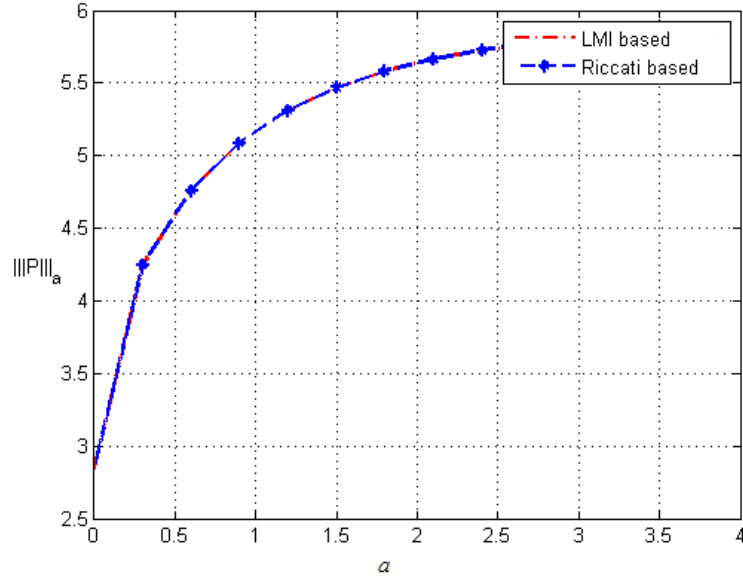


Рис. 2.5. Зависимость анизотропийной нормы от уровня средней анизотропии, вычисленной на основе теоремы 2.5.

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.7 & -3.25 & -0.7 & 0 \\ 1.8 & 0.4 & -6.4 & 2.6 \\ 1.0 & -1.9 & -5.4 & 2.4 \\ -0.6 & -2.7 & 5.4 & -2.8 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 3.2 & -3.5 \\ 2.5 & -7.9 \\ 3.8 & -7.6 \\ -1.2 & 8.2 \end{bmatrix}, \quad C = [0.2 \ 0.4 \ 0.45 \ 0.6], \quad D = [0.2 \ 1.0].$$

Выберем также $\alpha = 100$. Легко проверить, что система является допустимой, т.е. причинной и устойчивой. Результаты вычисления анизотропийной нормы с использованием модифицированной анизотропийной частотной теоремы показаны на рис. 2.5. На рис. 2.6 изображена абсолютная ошибка вычисления анизотропийной нормы с использованием модифицированной анизотропийной частотной теоремы и метода, основанного на применении теоремы 2.1.

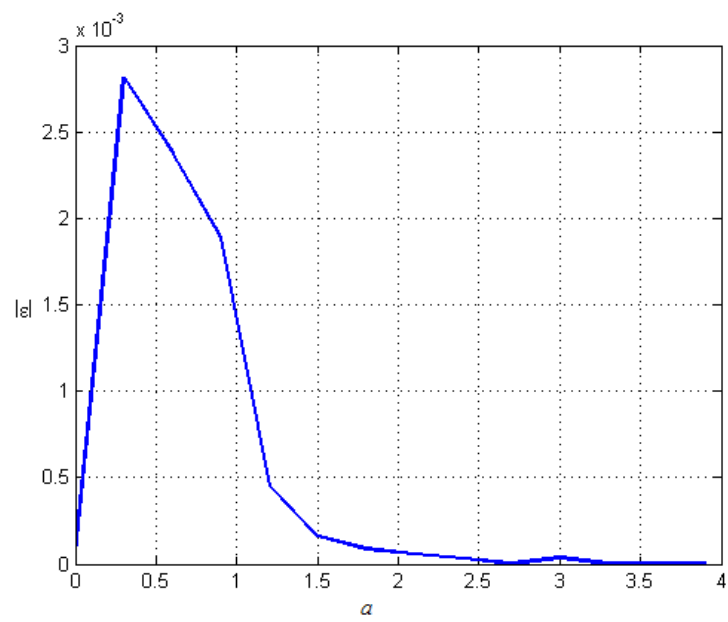


Рис. 2.6. Абсолютная ошибка вычисления анизотропийной нормы с использованием теоремы 2.5 и теоремы 2.1.

Выводы к главе 2

В данной главе были рассмотрены несколько подходов к анизотропийному анализу и вычислению анизотропийной нормы дескрипторной системы. Первый подход основан на эквивалентных преобразованиях и заключается в использовании эквивалентных вход-выходных операторов для вычисления анизотропийной нормы исходной дескрипторной системы через вычисление анизотропийной нормы обыкновенной системы. Данный метод позволяет точно вычислить анизотропийную норму, однако для его применения необходимо сначала проверить систему на допустимость. Кроме того, данный подход использует нелинейные матричные преобразования, которые затрудняют его применение при решении задачи синтеза анизотропийных регуляторов.

Второй подход основан на решении обобщенного алгебраического уравнения Риккати. В данном случае количество уравнений, которые необходимо решить для оценки анизотропийной нормы существенно меньше, а условия являются необходимыми и достаточными. В отличие от первого подхода, на систему накладывается ранговое ограничение. Несмотря на то, что это сужает возможный класс исследуемых систем, такое предположение является физически обоснованным, т.к. смысл его заключается в том, что возмущение не действует на алгебраические координаты.

Естественным продолжением второго подхода является преобразование условий в терминах матричных неравенств, что позволяет применять разработанные и хорошо зарекомендовавшие себя численные пакеты выпуклой оптимизации для решения задач анизотропийного анализа дескрипторных систем. Первая методика, основанная на матричных неравенствах, представляет собой нестрогие выпуклые ограничения. С помощью этих ограничений легко показать, что предельные случаи анизотропийной нормы для $a = 0$ и $a \rightarrow \infty$ в частотной области согласуются во временной области. Вторая методика основана на преобразованиях системы ко второй эквивалентной форме и сформулиро-

вана в терминах строгих матричных неравенств. Кроме того, вторая методика предполагает меньшее число переменных, необходимых для оценки анизотропной нормы системы, и удобна для решения задачи синтеза законов управления, которые будут рассмотрены в следующей главе.

Глава 3. Синтез анизотропийных регуляторов для дескрипторных систем с точно известными параметрами

В данной главе рассматриваются и решаются задачи оптимального и субоптимального анизотропийного управления для дескрипторных систем с точно известными параметрами.

3.1. Оптимальное управление

3.1.1. Общая постановка задач оптимального управления

Рассмотрим дескрипторную систему с реализацией в пространстве состояний в следующем виде:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \quad (3.1)$$

$$z(k) = C_z x(k) + D_{zw} w(k) + D_{zu} u(k), \quad (3.2)$$

$$y(k) = C_y x(k) + D_{yw} w(k), \quad (3.3)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — случайное внешнее возмущение, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — сигнал управления, $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ — измеряемый выход.

Предполагается, что все параметры системы точно известны, а $w(k)$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченной средней анизотропией $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$, $a \geq 0$.

Рассмотрим линейный строго неупреждающий закон управления в виде:

$$u(k) = K(x(k), y(k)),$$

где $K(\cdot)$ — функция, подлежащая определению. Тогда задачу синтеза оптимального анизотропийного управления можно сформулировать в следующем виде:

Задача 3.1. Для известного неотрицательного уровня средней анизотропии $\bar{A}(W) = a \geq 0$ входного возмущения $w(k)$ и системы (3.28)–(3.30), необходимо найти линейный закон управления $u(k) = K(x(k), y(k))$, который делает замкнутую систему допустимой и при этом минимизирует ее анизотропийную норму, определяемую соотношениями

$$\sup_{\bar{A}(G) \leq a} \frac{\|F_{cl}(P, K)G\|_2}{\|G\|_2} \rightarrow \min_K, \quad G \in \mathbf{G}_a, \quad (3.4)$$

где G — формирующий фильтр для замкнутой системы, \mathbf{G}_a — множество формирующих фильтров с заданным уровнем средней анизотропии равным a , а $F_{cl}(P, K)$ означает замкнутую систему.

Заметим, что задача оптимального анизотропийного управления является минимаксной, т.е. необходимо найти такой регулятор K , который минимизирует анизотропийную норму замкнутой системы относительно заданного множества входных возмущений W . Сформулированную проблему (как и всякую минимаксную задачу) можно рассматривать как антагонистическую игру двух игроков, в качестве первого из которых выступает стратегия управления, а в качестве второго — возмущение. Множеством управляющих стратегий выступает множество допустимых регуляторов, а множеством возмущающих стратегий — семейство случайных последовательностей с нулевым средним и ограниченным уровнем средней анизотропии a .

3.1.2. Оптимальное управление по переменным состояниям

Рассмотрим дискретную дескрипторную систему P в следующем виде:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \quad (3.5)$$

$$z(k) = Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k), \quad (3.6)$$

где $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ и $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — входной и выходной сигналы соответственно, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — сигнал управления. $E, A, B_w, B_u, C, D_w, D_u$ — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что система является причинно управляемой и стабилизируемой. Входной сигнал является окрашенной гауссовской последовательностью с известным уровнем средней анизотропии a , т.е. $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ($a \geq 0$).

Задача оптимального анизотропийного управления для дескрипторной системы по состоянию может быть сформулирована следующим образом.

Задача 3.2. Для заданной причинно управляемой и стабилизируемой системы (3.5)–(3.6) и случайного внешнего возмущения $w(k)$ с уровнем средней анизотропии $a \geq 0$ требуется найти линейный закон управления в виде статической обратной связи по состоянию $u(k) = Kx(k)$, который делает замкнутую систему допустимой и минимизирует ее анизотропийную норму:

$$\|P_{cl}(K)\|_a = \sup_{G(z) \in \mathbf{G}_a} \frac{\|P_{cl}(K)G\|_2}{\|G\|_2} \rightarrow \inf_K. \quad (3.7)$$

Подставим закон управления $u(k) = Kx(k)$ в уравнения системы (3.5)–(3.6). Тогда замкнутая система $P_{cl}(K)$ будет иметь вид

$$Ex(k+1) = (A + B_u K)x(k) + B_w w(k), \quad (3.8)$$

$$z(k) = (C + D_u K)x(k) + D_w w(k). \quad (3.9)$$

Закон управления $u = Kx(k)$ будем называть допустимым, если он делает замкнутую систему (3.8)–(3.9) допустимой, т.е. устойчивой и причинной. Идея решения оптимальной анизотропийной задачи управления (3.7) основана на

принципе седловой точки. Рассмотрим два множества. Для любого допустимого формирующего фильтра $G \in \mathbf{G}_a$ и любого допустимого регулятора $K \in \mathbf{K}(P)$ эти множества будут иметь вид:

$$\mathbf{K}^\diamond(G) \doteq \text{Arg} \min_{K \in \mathbf{K}(P)} \|P_{cl}(K)G\|_2, \quad G \in \mathbf{G}_a,$$

$$\mathbf{G}_a^\diamond(K) \doteq \text{Arg} \max_{G \in \mathbf{G}_a} \frac{\|P_{cl}(K)G\|_2}{\|G\|_2}, \quad K \in \mathbf{K}(P).$$

Множество $\mathbf{K}^\diamond(G)$ состоит из допустимых регуляторов, решающих взвешенную задачу \mathcal{H}_2 оптимизации, при этом вход $w(k)$ определяется как $W = GV$. Всякий регулятор $K \in \mathbf{K}(P)$ минимизирует дисперсию на выходе Z для входного сигнала с учетом $W = GV$. $\mathbf{K}(P)$ — множество регуляторов, которые делают замкнутую систему допустимой. Множество $\mathbf{G}_a^\diamond(K)$ состоит из формирующих фильтров, которые делают наихудшей спектральную плотность входного сигнала для заданного уровня анизотропии a для замкнутой системы.

Лемма 3.1. [268] *Если допустимый регулятор K является неподвижной точкой отображения $\mathbf{K}_a^\diamond \circ \mathbf{G}_a^\diamond$, то он является решением задачи 3.2.*

Таким образом, решение оптимальной задачи состоит из двух этапов. На первом этапе необходимо найти множество всех наихудших формирующих фильтров $G(z) \in \mathbf{G}_a$, генерирующих из гауссовского белого шума V входную последовательность W с заданным уровнем средней анизотропии $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$. На втором этапе необходимо решить взвешенную задачу \mathcal{H}_2 оптимального управления.

Следующий промежуточный результат для вычисления \mathcal{H}_2 нормы дескрипторной системы будет использован далее.

Лемма 3.2. *Пусть система, заданная уравнениями (2.22)–(2.23) является допустимой. Пусть также выполняется предположение*

$$\text{rank}(\tilde{E}) = \text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{E} & \tilde{B} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим обобщенное уравнение Ляпунова

$$\tilde{A}\tilde{G}\tilde{A}^T - \tilde{E}\tilde{G}\tilde{E}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T = 0. \quad (3.11)$$

Тогда \mathcal{H}_2 норма системы вычисляется по формулам

$$\|P\|_2^2 = \text{tr}(\tilde{C}\tilde{G}\tilde{C}^T + \tilde{D}^T\tilde{D}). \quad (3.12)$$

Доказательство леммы 3.2 аналогично доказательству леммы 2.2 с той лишь разницей, что уравнение (3.11) определяет грамиан управляемости системы (2.22)–(2.23).

Для удобства в дальнейшем изложении введем следующие обозначения $\hat{A} = A + B_u K$, $\hat{C} = C_1 + D_u K$ и предположим, что замкнутая система является допустимой. Следующая теорема позволяет найти факторизацию наилучшей спектральной плотности входного возмущения (наихудший формирующий фильтр) для замкнутой системы, на вход которой поступает возмущение со средним уровнем анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$.

Теорема 3.1. Пусть система (3.5)–(3.6) является причинно управляемой и стабилизируемой. Тогда для любого уровня средней анизотропии входного возмущения $a \geq 0$ существует единственная пара (q, R) , где скалярный параметр q принадлежит полуинтервалу $\left[0, \|P_{cl}\|_\infty^{-2}\right)$, а $R = R^T$ — $n \times n$ матрица, для которой справедливо условие $E^T R E \geq 0$. Решение (q, R) находится из системы уравнений

$$E^T R E = \hat{A}^T R \hat{A} + q \hat{C}^T \hat{C} + L^T \Sigma^{-1} L, \quad (3.13)$$

$$\Sigma = (I_{m_1} - q D_w^T D_w - B_w^T R B_w)^{-1}, \quad (3.14)$$

$$L = \Sigma (B_w^T R \hat{A} + q D_w^T \hat{C}). \quad (3.15)$$

$$-\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m_1 \Sigma}{\text{tr}(L P_G L^T + \Sigma)} \right) = a, \quad (3.16)$$

где $P_G = P_G^T > 0$, $P_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — грамиан управляемости формирующего фильтра G , который находится из решения обобщенного уравнения Ляпунова

$$E P_G E^T = (\hat{A} + B_w L) P_G (\hat{A} + B_w L)^T - B_w \Sigma B_w^T. \quad (3.17)$$

Кроме того, формирующий фильтр G с реализацией в пространстве состояний

$$G = \left[E, \frac{\hat{A} + B_w L}{L} \middle| \frac{B_w \Sigma^{1/2}}{\Sigma^{1/2}} \right] \quad (3.18)$$

является наилучшим формирующим фильтром для замкнутой системы.

Доказательство. Используя определение анизотропийной нормы (2.11), рассмотрим функцию Лагранжа, которая записывается как

$$\mathfrak{L} = \|P_{cl}G\|_2^2 - \mu\|G\|_2^2 - \lambda\bar{\mathbf{A}}(G). \quad (3.19)$$

Можно показать [119], что функция Лагранжа (3.19) достигает своего максимума, когда

$$q\Lambda(\omega) - I_{m_1} + \sigma S^{-1}(\omega) = 0, \quad (3.20)$$

где $\Lambda(\omega) = \hat{P}_{cl}^*(\omega)\hat{P}_{cl}(\omega)$, $S(\omega) = \hat{G}(\omega)\hat{G}^*(\omega)$.

Из уравнения (3.20) следует, что

$$S(\omega) = \sigma(I_{m_1} - q\Lambda(\omega))^{-1}$$

определяет спектральную плотность наилучшего входного возмущения. Без потери общности можно положить $\sigma = 1$ и переписать уравнение (3.20) в форме

$$q\hat{P}_{cl}^*(\omega)\hat{P}_{cl}(\omega) + \hat{G}^{-1}(\omega)(\hat{G}^*)^{-1}(\omega) = I_{m_1}.$$

Введем обозначение

$$\Theta = \begin{bmatrix} \sqrt{q}\hat{P}_{cl}(\omega) \\ \hat{G}^{-1}(\omega) \end{bmatrix}.$$

Тогда замкнутая система с наилучшим фильтром должна удовлетворять факторизации $\Theta^*\Theta = I_{m_1}$. Предполагая, что формирующий фильтр G является обратимым, имеем

$$G^{-1} = \left[E, \frac{\hat{A}}{-\Sigma^{-1/2}L} \middle| \frac{B_w}{\Sigma^{-1/2}} \right].$$

Реализация в пространстве состояний системы Θ будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \sqrt{q}P_{cl} \\ G^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E, & \widehat{A} | B_w \\ \Omega & | \Delta \end{bmatrix},$$

где

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sqrt{q}\widehat{C} \\ -\Sigma^{-1/2}L \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{q}D_w \\ \Sigma^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Используя лемму 2.1 и подставляя параметры системы Θ в выражения (2.25)–(2.27), получаем (3.13)–(3.15). Учитывая условия леммы 3.2, \mathcal{H}_2 норма формирующего фильтра определяется формулой

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(LP_G L^T + \Sigma). \quad (3.21)$$

Принимая во внимание определение средней анизотропии (1.35) и выражение (3.21), получаем уравнение (3.16). Это завершает доказательство. ■

Рассмотрим теперь расширенную систему с реализацией

$$E_* \widehat{x}(k+1) = A_* \widehat{x}(k) + B_{u*} u(k) + B_{v*} v(k), \quad (3.22)$$

$$z(k) = C_* \widehat{x}(k) + D_w v(k), \quad (3.23)$$

где $\widehat{x}(k) \in \mathbb{R}^{2n}$, $z(k) \in \mathbb{R}^p$, $v(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — белый гауссовский шум. Параметры

системы равны $E_* = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$,

$A_* = \begin{bmatrix} A & B_w L \\ 0 & A + B_w L \end{bmatrix}$, $B_{u*} = \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_* = \begin{bmatrix} C & D_w L \end{bmatrix}$. Так как формирующий фильтр G является обратимым, задача синтеза анизотропийного регулятора может быть сведена к задаче синтеза \mathcal{H}_2 оптимального регулятора, решение которой приведено в [165].

Теорема 3.2. Пусть система (3.22)–(3.23) является стабилизируемой и причинно управляемой. Закон управления, который решает оптимальную анизотропийную задачу, может быть найден из решения взвешенной задачи \mathcal{H}_2

оптимального управления в виде

$$K = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (3.24)$$

где $\Gamma = [\Gamma_1 \ \Gamma_2]$ определяется с помощью матрицы $T = T^T$, удовлетворяющей условию $E_*^T T E_* \geq 0$ и являющейся решением обобщенного алгебраического уравнения Риккати

$$E_*^T T E_* = A_*^T T A_* + C_*^T C_* + \Gamma^T \Pi \Gamma, \quad (3.25)$$

$$\Pi = (B_{u_*}^T T B_{u_*} + D_w^T D_w), \quad (3.26)$$

$$\Gamma = -\Pi^{-1}(B_{u_*}^T T A_* + D_w^T C_*). \quad (3.27)$$

Таким образом, решение оптимальной анизотропийной задачи при полном измерении вектора состояния сводится к решению связанных между собой матричных уравнений: два обобщенных алгебраических уравнения Риккати (3.13)–(3.15) и (3.25)–(3.27), обобщенного уравнения Ляпунова (3.17) и нелинейного уравнения (3.16).

В случае, если $a = 0$ параметры наихудшего формирующего фильтра равны $L = 0$ и $\Sigma = I_{m_1}$. В этом случае решение задачи оптимального анизотропийного управления по состоянию совпадает с решением \mathcal{H}_2 оптимальной задачи.

Пример 3.1. Рассмотрим систему:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1.15 & -0.3 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = 0.2, \quad D_u = 0.1.$$

Легко проверить, что $\text{rank}(E) = \text{rank}[E \ B_w] = 1$. Система причинная, но не является устойчивой ($\rho(E, A) = 1.25$).

Найдем управление по состоянию в виде $u(k) = Kx(k)$ для уровня анизотропии $a = 0.4$ с использованием доказанных теорем.

Решение было получено с помощью пакета символьных вычислений *Matlab*. Оптимальный регулятор равен $K^* = \begin{bmatrix} -1.6514 & 0 \end{bmatrix}$. Замкнутая система является допустимой, обобщенный спектральный радиус пары $\rho(E, A + B_u K^*) = 0.4014$, а ее анизотропийная норма равна $\|P_{cl}^{SF}\|_a = 0.4978$.

3.1.3. Оптимальное управление по выходной переменной

Объект управления задан в форме

$$Ex(k+1) = Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \quad (3.28)$$

$$z(k) = C_z x(k) + D_{zw} w(k) + D_{zu} u(k), \quad (3.29)$$

$$y(k) = C_y x(k) + D_{yw} w(k), \quad (3.30)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ – внешний сигнал, который нужно отслеживать или возмущение, которое необходимо подавить, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ – сигнал управления, $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ – управляемый выход, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ – измеряемый выход.

Предполагается, что сигнал $w(k)$ является стационарной гауссовской последовательностью с известным уровнем средней анизотропии $a \geq 0$.

Пусть также выполнены следующие стандартные предположения о системе

A1. Система является стабилизируемой и причинно управляемой.

A2. Система является детектируемой и причинно наблюдаемой.

A3. Размерность управляемого сигнала z меньше размерности входного возмущения w : $p_1 < m_1$.

A4. Матрица D_{yw} имеет полный строчный ранг: $\text{rank } D_{yw} = p_2 \leq m_1$.

A5. Матрица D_{zu} имеет полный столбцовый ранг: $\text{rank } D_{zu} = m_2 \leq p_1$.

Тогда задача синтеза анизотропийного регулятора может быть сформулирована в следующем виде:

Задача 3.3. Для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ последовательности $w(k)$ и для системы (3.28) требуется найти динамический регулятор K , который делает замкнутую систему допустимой, а также минимизирует ее a -анизотропийную норму:

$$\sup \frac{\|F_l(P, K)G\|_2}{\|G\|_2}; G \in \mathbf{G}_a \rightarrow \min_K. \quad (3.31)$$

Так как исходная система может быть непричинной, то синтез оценивающего регулятора невозможен. Поэтому процедуру синтеза необходимо разделить на два этапа. На первом этапе строится контур, который будет обеспечивать свойство причинности для исходной системы (каузализация). На втором этапе строится оценивающий регулятор, стабилизирующий систему и минимизирующий анизотропийную норму замкнутой системы.

Решение задачи

Каузализация системы. В силу предположения A1 система является причинно управляемой, то есть существует такой закон управления $\tilde{u}(k) = K_1 y(k)$, что пара $(E, A + B_u K_1 C_y)$ является причинной.

Рассмотрим процедуру поиска коэффициента усиления K_1 [62]. Так как разомкнутая система (3.28)–(3.30) предполагается регулярной, то существуют такие две невырожденные матрицы \tilde{W} и \tilde{V} , что исходная система (3.28)–(3.30) преобразуется ко второй эквивалентной форме, где

$$\tilde{W}E\tilde{V} = \text{diag}(I_r, 0), \quad \tilde{W}A\tilde{V} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

где $r = \text{rank}(E)$. Матрицы \tilde{W} и \tilde{V} могут быть найдены из сингулярной декомпозиции (1.17) и (1.18).

Так как исходный объект предполагается непричинным, то A_{22} может быть вырожденной матрицей [273]. Преодолеть это поможет следующая процедура.

Применим преобразование координат

$$V^{-1}x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

к системе

$$Ex(k+1) = (A + B_u K_1 C_y)x(k),$$

и умножим слева на матрицу \widetilde{W} . Имеем:

$$\widetilde{W}E\widetilde{V} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \left(\widetilde{W}A\widetilde{V} + \widetilde{W}B_u K_1 C_y \widetilde{V} \right) \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}.$$

Последнее выражение можно переписать в форме:

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} K_1 \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}.$$

Если $\text{rank}(A_{22}) = s < n - r$, рассмотрим следующий блок $(A_{22} + B_{22}K_1C_{22})$. Согласно предположению A1 существует такая матрица K_1 , что $\text{rank}(A_{22} + B_{22}K_1C_{22}) = n - r$. Применяя в очередной раз сингулярную декомпозицию, представим матрицу A_{22} в форме

$$S_{A_{22}}A_{22}U_{A_{22}} = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Умножая слева и справа выражение $(A_{22} + B_{22}K_1C_{22})$ на матрицы $S_{A_{22}}$ и $U_{A_{22}}$, получаем

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \widetilde{B}_{22}K_1\widetilde{C}_{22}, \quad (3.35)$$

где $\widetilde{B}_{22} = S_{A_{22}}B_{22}$ и $\widetilde{C}_{22} = C_{22}U_{A_{22}}$.

Тогда задача каузализации может быть представлена как задача поиска такой матрицы коэффициентов K_1 , что матрица (3.35) станет невырожденной.

Для простоты положим, что необходимо найти такую матрицу K_1 , чтобы выполнялось равенство

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tilde{B}_{22}K_1\tilde{C}_{22} = \begin{bmatrix} 2I_s & 0 \\ 0 & I_{n-r-s} \end{bmatrix},$$

что эквивалентно

$$\tilde{B}_{22}K_1\tilde{C}_{22} = I_{n-r}.$$

Откуда следует, что регулятор можно выбрать в виде:

$$K_1 = \tilde{B}_{22}^+\tilde{C}_{22}^+, \quad (3.36)$$

где M^+ — псевдообращение по Муру-Пенроузу матрицы M . Существование такого регулятора гарантируется предположениями **A1** и **A2**, которые гарантируют, что матрицы \tilde{B}_{22} и \tilde{C}_{22} являются полноранговыми, т.е. $\text{rank}(\tilde{B}_{22}) = \min(m_1, n-r)$ и $\text{rank}(\tilde{C}_{22}) = \min(p_2, n-r)$.

Синтез оценивающего регулятора для динамической подсистемы.

Рассмотрим закон управления следующего вида

$$u(k) = K_1y(k) + u_1(k). \quad (3.37)$$

Подставим выражение (3.37) в уравнения (3.28)–(3.30), получим

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= (A + B_uK_1C_y)x(k) + (B_w + B_uK_1D_{yw})w(k) + B_uu_1(k), \\ z(k) &= (C_z + D_{zu}K_1C_y)x(k) + (D_{zw} + D_{zu}K_1D_{yw})w(k) + D_{zu}u_1(k), \\ y(k) &= C_yx(k) + D_{yw}w(k). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $\bar{A} = A + B_uK_1C_y$, $\bar{C}_1 = C_z + D_{zu}K_1C_y$, $\bar{C}_2 = C_y$, $\bar{B}_1 = B_w + B_uK_1D_{yw}$, $\bar{B}_2 = B_u$ и $\bar{D}_{11} = D_{zw} + D_{zu}K_1D_{yw}$.

Применяя преобразование координат (3.33) и умножая уравнения слева на

матрицу W , получим

$$x_1(k+1) = \bar{A}_{11}x_1(k) + \bar{A}_{12}x_2(k) + \bar{B}_{11}w(k) + \bar{B}_{21}u_1(k), \quad (3.38)$$

$$0 = \bar{A}_{21}x_1(k) + \bar{A}_{22}x_2(k) + \bar{B}_{12}w(k) + \bar{B}_{22}u_1(k), \quad (3.39)$$

$$z(k) = \bar{C}_{11}x_1(k) + \bar{C}_{12}x_2(k) + \bar{D}_{11}w(k) + D_{12}u_1(k), \quad (3.40)$$

$$y(k) = \bar{C}_{21}x_1(k) + \bar{C}_{22}x_2(k) + D_{21}w(k), \quad (3.41)$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{W}\bar{A}\widetilde{V} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, & \widetilde{W}\bar{B}_w &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \end{bmatrix}, & \widetilde{W}\bar{B}_u &= \begin{bmatrix} \bar{B}_{21} \\ \bar{B}_{22} \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_z\widetilde{V} &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \end{bmatrix}, & \bar{C}_y\widetilde{V} &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Процедура каузализации позволяет преобразовать исходную систему к эквивалентной системе, содержащей явные выражения для динамической и алгебраической подсистем. Выразим $x_2(k)$ через $x_1(k)$, подставим в уравнения (3.38)–(3.41). Получим следующую обыкновенную систему:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \mathcal{A}x_1(k) + \mathcal{B}_1w(k) + \mathcal{B}_2u_1(k), \\ z(k) &= \mathcal{C}_1x_1(k) + \mathcal{D}_{11}w(k) + \mathcal{D}_{12}u_1(k), \\ y(k) &= \mathcal{C}_2x_1(k) + \mathcal{D}_{21}w(k) + \mathcal{D}_{22}u_1(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}, & \mathcal{B}_i &= \bar{B}_{i1} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_{i2}, \\ \mathcal{C}_i &= \bar{C}_{i1} - \bar{C}_{i2}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}, & \mathcal{D}_{ij} &= D_{ij} - \bar{C}_{i2}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{B}_{j2}, \end{aligned}$$

где $i, j = 1, 2$.

Исходная алгебро-разностная система после введения каузализирующей обратной связи может быть сведена к обыкновенной системе. Однако в общем случае эквивалентная система не удовлетворяет стандартным требованиям, накладываемым на объект управления. А именно, в общем случае не выполняется требование

$$\mathcal{D}_{22} = 0, \quad (3.42)$$

Для того, чтобы полученная система удовлетворяла стандартным требованиям, воспользуемся преобразованиями, описанными в [229].

Ограничение (3.42) можно обойти, воспользовавшись заменой переменных

$$y^{(1)}(k) = y(k) - \mathcal{D}_{22}u_1(k).$$

Такая замена переменных позволяет обнулить матрицу \mathcal{D}_{22} объекта управления, вводя статическую обратную связь с коэффициентом усиления $-\mathcal{D}_{22}$ на регуляторе между измеряемым выходом $y(k)$ и управлением $u_1(k)$.

После указанных выше преобразований система удовлетворяет стандартным требованиям, поэтому для нее применима уже решенная задача синтеза анизотропного регулятора по выходу [268]. В данной работе приведем кратко алгоритм решения и формулы для нахождения параметров регулятора. Более подробно о методике синтеза оптимальных анизотропных регуляторов можно узнать, например, из [264].

Исходя из условия оптимальности, синтез стабилизирующего регулятора разбивается на несколько подэтапов:

1. Синтез наилучшего формирующего фильтра замкнутой системы.
2. Синтез наблюдателя полного порядка для системы, взвешенной формирующим фильтром.
3. Решение задачи \mathcal{H}_2 оптимального управления для объекта, взвешенного формирующим фильтром.

Приведем формулы для расчета оценивающего регулятора [268]. Его реализация в пространстве состояний имеет вид:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

где

$$\tilde{A} = \mathcal{A} + \mathcal{B}_1M + \mathcal{B}_2(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \Lambda(\mathcal{C}_2 + \mathcal{D}_{21}M), \quad \tilde{B} = \Lambda, \quad \tilde{C} = \Gamma_1 + \Gamma_2. \quad (3.44)$$

Параметры $\Gamma_1, \Gamma_2, M, \Lambda$ могут быть найдены из решения следующих уравнений:

1. Алгебраического уравнения Риккати для поиска наилучшего формирующего фильтра замкнутой системы

$$\begin{aligned} R &= A_{cl}^T R A_{cl} + q C_{cl}^T C_{cl} + L^T \Sigma^{-1} L, \\ \Sigma &= (I_{m_1} - q \mathcal{D}_{11}^T \mathcal{D}_{11} - B_{cl}^T R B_{cl})^{-1}, \\ L &= \Sigma (B_{cl}^T R A_{cl} + q \mathcal{D}_{11}^T C_{cl}), \end{aligned}$$

где $q \in \mathbb{R}$, $R \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ и

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_2 \tilde{C} \\ \tilde{B} \mathcal{C}_2 & \tilde{A} \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \tilde{B} \mathcal{D}_{21} \end{bmatrix}, \quad C_{cl} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{12} \tilde{C} \end{bmatrix}.$$

2. Уравнения относительно логарифма для уровня средней анизотропии

$$a = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m_1 \Sigma}{\text{tr}(L P L^T + \Sigma)} \right).$$

3. Уравнения Ляпунова для вычисления \mathcal{H}_2 нормы наилучшего формирующего фильтра

$$P = (A_{cl} + B_{cl} L) P (A_{cl} + B_{cl} L)^T + B_{cl} \Sigma B_{cl}^T.$$

4. Алгебраического уравнения Риккати для наблюдения

$$\begin{aligned} S &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 L_1) S (\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 L_1)^T + \mathcal{B}_1 \Sigma \mathcal{B}_1^T - \Lambda \Theta \Lambda^T, \\ \Theta &= (\mathcal{C}_2 + \mathcal{D}_{21} L_1) S (\mathcal{C}_2 + \mathcal{D}_{21} L_1)^T + \mathcal{D}_{21} \Sigma \mathcal{D}_{21}^T, \\ \Lambda &= ((\mathcal{A} + \mathcal{B}_1 L_1) S (\mathcal{C}_2 + \mathcal{D}_{21} L_1)^T + \mathcal{B}_1 \Sigma \mathcal{D}_{21}^T) \Theta^{-1}, \end{aligned}$$

где L_1 является блоком размера $(m_1 \times n)$ матрицы L таким, что $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix}$. Матрица M из (3.43) определяется как $M = L_1 + L_2$.

5. Алгебраического уравнения Риккати для решения расширенной задачи

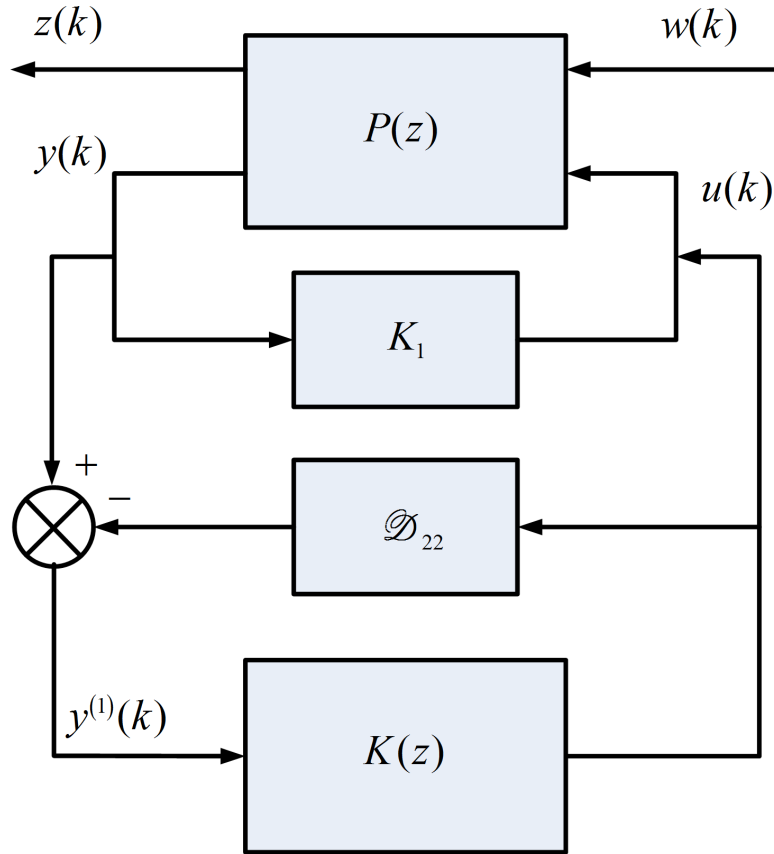


Рис. 3.1. Структурная схема замкнутой системы.

\mathcal{H}_2 оптимизации для объекта, взвешенного формирующим фильтром

$$T = A_*^T T A_* + C_*^T C_* - \Gamma^T \Pi \Gamma,$$

$$\Pi = B_*^T T B_* + \mathcal{D}_{12}^T \mathcal{D}_{12},$$

$$\Gamma = -\Pi^{-1}(B_*^T T A_* + \mathcal{D}_{12}^T C_*),$$

в котором $T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix}$, а

$$A_* = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 M \\ 0 & \mathcal{A} + \mathcal{B}_1 M + \mathcal{B}_2(\Gamma_1 + \Gamma_2) \end{bmatrix}, \quad B_* = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_* = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{11} M \end{bmatrix}.$$

Тогда окончательно структура замкнутой системы примет вид, показанный на Рис. 3.1. Как видно из рисунка, регулятор имеет два контура. Первый контур служит для каузализации обратной (алгебраической) подсистемы, а второй

— для стабилизации прямой (динамической) подсистемы. Коэффициент $-\mathcal{D}_{22}$ служит для обхода ограничения (3.42).

Раскроем выражение для регулятора, учитывая (3.43), тогда получаем

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}y^{(1)}(k), \\ u_1(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k),\end{aligned}$$

где $\tilde{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние оценителя. С учетом того, что $y^{(1)}(k) = y(k) - \mathcal{D}_{22}u_1(k)$, имеем

$$y^{(1)}(k) = y(k) - \mathcal{D}_{22}u_1(k) = y(k) - \mathcal{D}_{22}\tilde{C}\tilde{x}(k),$$

тогда параметры регулятора для исходного сигнала наблюдения равны

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{A} - \tilde{B}\mathcal{D}_{22}\tilde{C} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что разбиение задачи на две составляющие позволяет решить исходную задачу поиска единого регулятора. Действительно, согласно рис. 1 регулятор можно представить в виде единой системы управления с иерархической структурой, состоящей из нескольких звеньев. Так как предполагается, что исходная система регулярна, то она представима в эквивалентной форме (1.13), в которой матрица A_{22} может быть вырожденной. Свойство причинной управляемости позволяет найти закон управления $\tilde{u}(k) = K_1x(k)$ такой, что матрица A_{22} становится невырожденной. Таким образом, появляется возможность выразить координаты $x_2(k)$ через $x_1(k)$ и перейти к эквивалентному вход-выходному оператору пониженной размерности, для которого процедура синтеза уже хорошо изучена. Так как оператор является эквивалентным, то, решая задачу для обыкновенной системы пониженной размерности, решаем исходную задачу для оператора полной размерности. Коэффициенты усиления в цепи обратной связи, решающие задачу каузализации системы, косвенным образом входят в полученный оператор, поэтому при решении задачи синтеза оптимального оценивающего регулятора их также учитывают.

Пример 3.2. Рассмотрим вычислительный пример, наглядно демонстрирующий методикку синтеза анизотропийного регулятора для дескрипторной системы. Пусть параметры объекта управления равны:

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 25 \\ -1 & 0.5 & 0 & 6 \\ 1 & -24 & 0 & 1 \\ -1 & -0.5 & 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -0.01 & 0.125 & 25.005 \\ -0.9975 & 0.4925 & 0.03 & 5.995 \\ 0.88 & -23.875 & 0 & 0.005 \\ -1.0025 & -0.5025 & 0.1 & 20.015 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0.0105 & -0.0093 \\ 0.005 & -0.0011 \\ -0.0015 & -0.0249 \\ 0.004 & -0.0092 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ -0.005 & -0.0025 \\ 0.005 & -0.12 \\ 0.015 & -0.0025 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad D_{yu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверим, является ли система причинной. Характеристический полином системы равен $\det(zE - A) = 0.0057z^2 - 0.0114z - 0.00567$. Степень характеристического полинома $\deg \det(zE - A) = 2$, в то время как $\text{rank}(E) = 3$. Таким образом, система не является причинной.

Проверим выполнение критериев причинной управляемости и причинной наблюдаемости

$$\text{rank} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B_u \end{pmatrix} = 7, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C_y \end{pmatrix} = 7.$$

Система является причинно управляемой и причинно наблюдаемой, поэтому возможно синтезировать каузализирующую статическую обратную связь по выходу.

Параметры регулятора равны

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -37.74 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Конечные собственные значения системы равны $\lambda(E, A + B_u K_1 C_y) = \begin{bmatrix} 1.0001 & 1.0031 & 0.9919 \end{bmatrix}$. Система является неустойчивой. Характеристический полином системы равен $\det(zE - (A + B_u K_1 C_y)) = -55.93z^3 + 167.5z^2 - 167.2z + 55.6$.

Выполнено равенство $\deg \det(zE - A) = \text{rank}(E)$, поэтому систему можно преобразовать к эквивалентной обыкновенной системе.

В результате преобразований был получен объект управления с параметрами

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1.0001 & 0 & -0.013 \\ 0 & 0.9945 & -0.159 \\ 0 & -0.0001 & 1.004 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.015 & -0.0489 \\ 0.0006 & 0.026 \\ 0 & -0.0002 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} -0.033 & -0.0097 \\ 0.0001 & 0.1197 \\ 0 & -0.0002 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.0021 & -0.0021 & -1.3978 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} -0.0436 & 0.0014 & -1.5488 \\ -0.0008 & 0.0001 & -0.0027 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ -0.0106 & -0.0029 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0265 & 0 \end{bmatrix}.$$

Произведем процедуру синтеза оценивающего регулятора полного порядка для полученной эквивалентной системы при различных уровнях средней анизотропии. Результаты сведены в таб. 3.1.

Рассмотрим решение задачи стабилизации для исходной системы при наличии возмущающего воздействия на входе системы со средним уровнем ани-

Таблица 3.1. Норма замкнутой системы в зависимости от уровня средней анизотропии a

a	0	0.05	0.5	1.0	5	∞
$\ \ P\ \ _a$	0.0398	0.2372	0.5010	0.61995	0.7502	0.7510

зотропии $a = 0.1$. На рис. 3.2 показаны графики управляющего воздействия, а на рис. 3.3 — управляемый выход системы для трех типов регуляторов: \mathcal{H}_2 , анизотропийного (АС) и \mathcal{H}_∞ .

Так как $\|P\|_2/\sqrt{m} \leq \|P\|_a \leq \|P\|_\infty$, разработчик может более тонко настроить замкнутую систему по отношению к влиянию внешних возмущений, изменяя уровень средней анизотропии от 0 до достаточно больших значений. Было показано, что \mathcal{H}_∞ регулятор обеспечивает более быстрый переходный процесс, однако обладает более широкой полосой пропускания. LQG/ \mathcal{H}_2 обеспечивают достаточно гладкий переходный процесс, так как настроены на минимизацию влияния гауссовского белого шума, но не могут обеспечить робастность. Анизотропийные регуляторы позволяют найти приемлемый компромисс между двумя подходами.

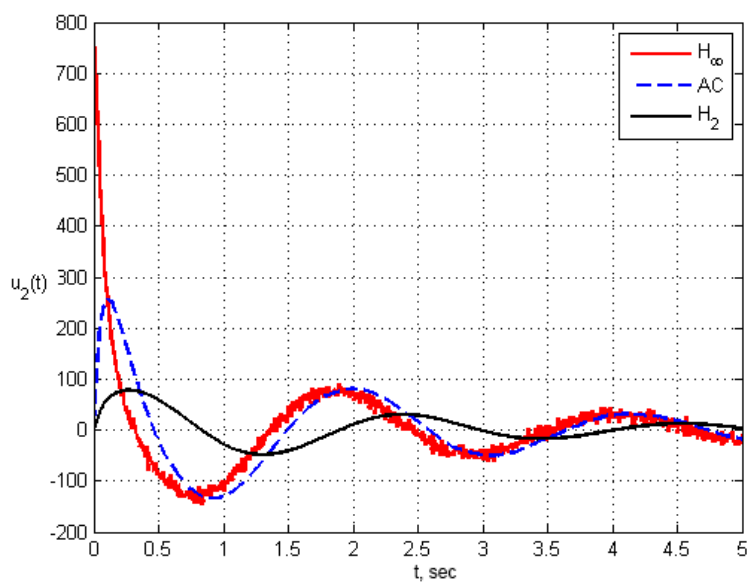
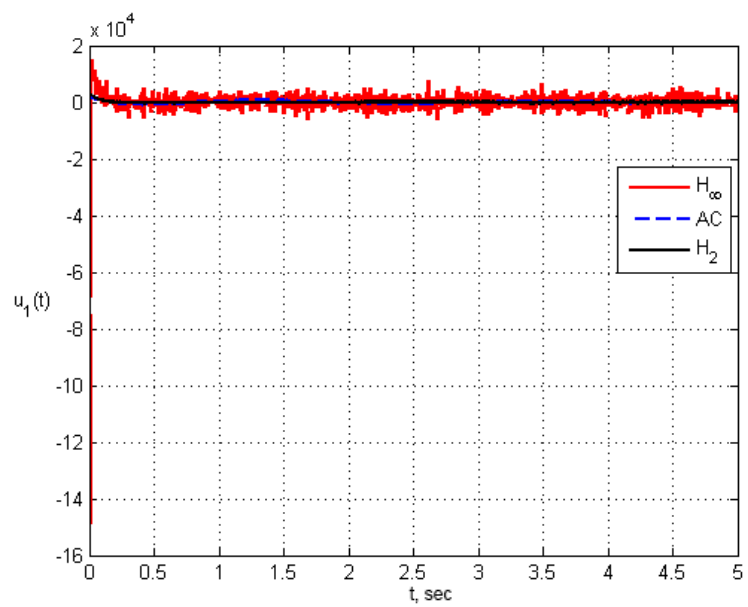


Рис. 3.2. Управляющие воздействия.

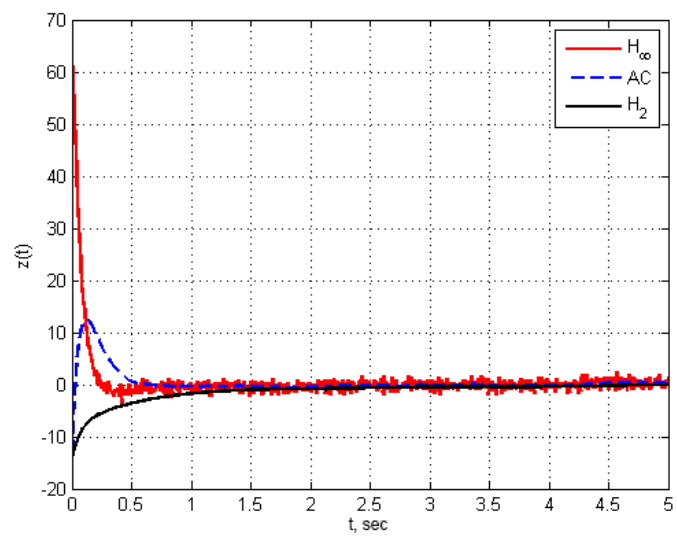


Рис. 3.3. Управляемый выход системы.

3.2. Субпотимальное управление

3.2.1. Общая постановка задачи субоптимального управления

Рассмотрим дескрипторную систему, заданную в пространстве состояний:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k), \quad (3.45)$$

$$z(k) = Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k), \quad (3.46)$$

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — стационарная гауссовская последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$, $a \geq 0$, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_2}$ — управление, $E, A, B_w, B_u, C, D_w, D_u$ известные действительные матрицы соответствующих размерностей, $\text{rank}(E) = r < n$.

Предположим, что

1. система (3.45)–(3.46) является причинно управляемой и стабилизируемой;
2. выполнено ранговое ограничение

$$\text{rank}(E) = \text{rank} \begin{bmatrix} E & B_w \end{bmatrix}.$$

Задача 3.4. *Входная последовательность W — стационарная гауссовская случайная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. Предполагается, что известны скалярные величины $a \geq 0$ и $\gamma > 0$. Рассмотрим закон управления в виде:*

$$u(k) = Kx(k).$$

Задачей синтеза субоптимального анизотропийного регулятора для дескрипторных систем является поиск такого закона управления $u(k) = Kx(k)$, при котором замкнутая система является допустимой и выполнено неравенство

$$\|P_{cl}\|_a \leq \gamma.$$

3.2.2. Синтез субоптимального анизотропийного управления на основе Риккати подхода

Рассмотрим задачу управления по состоянию. Будем искать закон управления в форме $u_{SF}(k) = F_2x(k)$. Тогда замкнутая система P_{cl}^{SF} будем иметь вид

$$Ex(k+1) = (A + B_u F_2)x(k) + B_w w(k), \quad (3.47)$$

$$z(k) = (C + D_u F_2)x(k) + D_w w(k). \quad (3.48)$$

Без снижения общности будем полагать, что начальные условия на системе (3.45)–(3.46) удовлетворяют уравнению $Ex(0) = 0$. Требуется найти такое F_2 , при котором замкнутая система является допустимой, а ее анизотропийная норма $\|P_{cl}^{SF}\|_a$ ограничена числом $\gamma > 0$.

Теорема 3.3. *Для заданного уровня средней анизотропии входного возмущения $\bar{A}(W) = a \geq 0$ и числа $\gamma > 0$ замкнутая система P_{cl}^{SF} с реализацией в пространстве состояний, определяемой выражениями (3.47)–(3.48), является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом γ , т.е. $\|P_{cl}^{SF}\|_a \leq \gamma$, если существуют такая матрица $\Phi = \Phi^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и положительное число $\eta > \gamma^2$, которые удовлетворяют следующим условиям*

$$E^T \Phi E \geq 0, \quad (3.49)$$

$$B_w^T \Phi B_w + D_w^T D_w - \gamma^2 I_{m_1} < 0, \quad (3.50)$$

$$B_u^T \Phi B_u + D_u^T D_u > 0, \quad (3.51)$$

$$-\frac{1}{2} \ln(\det((\eta - \gamma^2)(\eta I_{m_1} - B_w^T \Phi B_w - D_w^T D_w)^{-1})) \geq a, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} E^T \Phi E &= A^T \Phi A + C^T C - \\ &- (A^T \Phi \bar{B} + S)(\bar{B}^T \Phi \bar{B} + R)^{-1}(\bar{B}^T \Phi A + S^T), \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\text{где } \bar{B} = \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} C^T D_w & C^T D_u \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} D_w^T D_w - \eta I_{m_1} & D_w^T D_u \\ D_u^T D_w & D_u^T D_u \end{bmatrix}.$$

При этом закон управления определяется по формуле:

$$F_2 = -(B_u^T \Phi B_u + D_u^T D_u)^{-1} (B_u^T \Phi A + D_u^T C). \quad (3.54)$$

Доказательство. Доказательство теоремы состоит из трех этапов. На первом этапе необходимо показать, что система, замкнутая законом управления $u(k) = F_2 x(k)$, является допустимой. На втором этапе докажем, что $P_{cl}^{SF} \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m_1}$. На третьем этапе для замкнутой системы применим частотную теорему 2.2 и установим выполнение ее условий с условиями настоящей теоремы.

Пусть $M_1 = B_w^T \Phi B_w + D_w^T D_w - \eta I_{m_1}$. Так как по условиям теоремы $B_w^T \Phi B_w + D_w^T D_w - \gamma^2 I_{m_1} < 0$ и $\eta > \gamma^2$, то $M_1 < 0$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} M_2 &= B_u^T \Phi B_u + D_u^T D_u > 0, \\ M_3 &= B_w^T \Phi B_w + D_w^T D_w - \gamma^2 I_{m_1} < 0, \\ N &= B_w^T \Phi B_u + D_w^T D_u, \\ A_{cl} &= A + B_u F_2, \quad C_{cl} = C + D_u F_2. \end{aligned}$$

Заметим также, что матрица

$$M = \bar{B}^T \Phi \bar{B} + R = \begin{bmatrix} M_1 & N \\ N^T & M_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Введем вспомогательную переменную

$$F = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = -M^{-1} (\bar{B}^T \Phi A + S^T). \quad (3.55)$$

Выражение (3.55) можно переписать в форме

$$MF = -(\bar{B}^T \Phi A + S^T).$$

Следовательно,

$$M_1 \bar{F}_1 + N F_2 = -(B_w^T \Phi A + D_w^T C),$$

$$N^T \bar{F}_1 + M_2 F_2 = -(B_u^T \Phi A + D_u^T C).$$

Без снижения общности выберем матрицу \bar{F}_1 , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} M_1 \bar{F}_1 &= 0, \\ N^T \bar{F}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$(A + B_u F_2)^T \Phi B_w + (C + D_u F_2)^T D_w = 0. \quad (3.56)$$

Из выражений (3.54), (3.56) с учетом того, что

$$A^T \Phi A + C^T C - E^T \Phi E = -F_2^T M_2 F_2, \quad (3.57)$$

Уравнение (3.57) эквивалентно обобщенному уравнению Ляпунова (1.44) с матрицами E , $A_{cl} = A + B_u F_2$ и $Q = \begin{bmatrix} C \\ (M_2)^{1/2} F_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \\ (M_2)^{1/2} F_2 \end{bmatrix} > 0$. Откуда следует, что пара матриц (E, A_{cl}) является допустимой.

Теперь покажем, что $\|P_{cl}^{SF}\|_\infty^2 \leq \eta$. Рассмотрим следующую функцию

$$T(x(k)) = x^T(k) E^T \Phi E x(k) \geq 0.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$H(x(k), w(k)) = T(x(k+1)) - T(x(k)) + \|z(k)\|^2 - \eta \|w(k)\|^2.$$

Здесь $\|z(k)\|^2 = z^T(k) z(k)$. Не снижая общности, предположим также, что $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}, k \geq 0} \in \mathcal{L}_2$. Покажем, что $H(x(k), w(k)) \leq 0$:

$$\begin{aligned} H(x(k), w(k)) &= x^T(k+1) E^T \Phi E x(k+1) - x^T(k) E^T \Phi E x(k) + \\ &+ \|Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k)\|^2 - \eta \|w(k)\|^2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Подставим $E x(k+1)$ из выражения (3.45), получим

$$\begin{aligned} H(x(k), w(k)) &= (Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k))^T \Phi (Ax(k) + B_w w(k) + B_u u(k)) - \\ &- x^T(k) E^T \Phi E x(k) + \|Cx(k) + D_w w(k) + D_u u(k)\|^2 - \eta \|w(k)\|^2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Учитывая, что $u(k) = F_2x(k)$, имеем

$$(Ax(k) + B_w w(k) + B_u F_2 x(k))^T \Phi (Ax(k) + B_w w(k) + B_u F_2 x(k)) - \\ - x^T(k) E^T \Phi E x(k) + \|Cx(k) + D_w w(k) + D_u F_2 x(k)\|^2 - \eta \|w(k)\|^2. \quad (3.60)$$

Вводя обозначение $\Theta = (A^T \Phi B_u + C^T D_u) F_2$, последнее выражение можно записать как

$$w^T(k) M_3 w(k) + w^T(k) ((A + B_u F_2)^T \Phi B_w + (C + D_u F_2)^T D_w)^T x(k) + \\ + x^T(k) ((A + B_u F_2)^T \Phi B_w + (C + D_u F_2)^T D_w) w(k) + \\ + x^T(k) (A^T \Phi A + C^T C - E^T \Phi E + F_2^T M_2 F_2 + \Theta + \Theta^T) x(k) \quad (3.61)$$

С учетом (3.57) получаем

$$H(x(k), w(k)) = w^T(k) M_3 w(k) - \\ - 2x^T(k) ((A^T \Phi B_u + C^T D_u) M_2^{-1} (B_u^T \Phi A + D_u^T C)) x(k) \leq 0. \quad (3.62)$$

Проведя суммирование слагаемых в выражении для $H(x(k), w(k))$, определенным выражением (3.58), с $k = 0$ до $k \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} H(x(k), w(k)) = T(x(\infty)) - T(x(0)) + \sum_{k=0}^{\infty} (\|z(k)\|^2 - \eta \|w(k)\|^2) \leq 0.$$

Так как замкнутая система является устойчивой, то $T(x(k)_{k \rightarrow \infty}) = x^T(k)_{k \rightarrow \infty} E^T \Phi E x(k)_{k \rightarrow \infty} = 0$, и так как $E x(0) = 0$, получаем $T(x(0)) = x^T(0) E^T \Phi E x(0) = 0$, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\|z(k)\|^2 - \eta \|w(k)\|^2) \leq 0$$

и, следовательно,

$$\sup_{W \in \mathcal{L}_2} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \|w(k)\|^2} \leq \eta.$$

Так как замкнутая система $P_{cl}^{SF} \in \mathcal{H}_{\infty}^{p \times m_1}$, то для нее можно применить анизотропийную частотную теорему. Введем обозначения $\eta = q^{-1}$ и

$\Phi = q^{-1}\widehat{R}$. Тогда обобщенное алгебраическое уравнение Риккати (2.42)–(2.44) для замкнутой системы (3.47)–(3.48) совпадает с уравнением (3.53). Неравенство (3.52) совпадает с неравенством (2.41). Таким образом справедливо неравенство $\|P_{cl}^{SF}\|_a \leq \gamma$, что завершает доказательство теоремы. ■

Замечание 3.1. Рассмотрим предельный случай, при котором $a \rightarrow +\infty$. Преобразуем выражение (3.52) следующим образом:

$$-\ln(\det(\eta I_{m_1} - B_w^T \Phi B_w - D_w^T D_w)^{-1}) \geq 2a + m_1 \ln(\eta - \gamma^2). \quad (3.63)$$

Так как $\eta I_{m_1} - B_w^T \Phi B_w - D_w^T D_w \leq \eta I_{m_1}$, то неравенство (3.63) может быть переписано в виде

$$-\ln(\det(\eta^{-1} I_{m_1})) \geq 2a + m_1 \ln(\eta - \gamma^2).$$

Откуда имеем

$$\eta \leq \frac{\gamma^2}{1 - e^{-2a/m_1}}$$

и

$$\gamma^2 < \eta \leq \frac{\gamma^2}{1 - e^{-2a/m_1}}. \quad (3.64)$$

В случае, когда $a \rightarrow +\infty$ из условия (3.64) получаем, что $\eta \rightarrow \gamma^2$, поэтому неравенство (3.52) выполняется всегда и не требует проверки. Подставляя γ^2 вместо η в уравнения (3.49)–(3.53), получаем условия для синтеза субоптимального \mathcal{H}_∞ управления. Откуда следует, что $\lim_{a \rightarrow +\infty} \|P_{cl}^{SF}\|_a = \|P_{cl}^{SF}\|_\infty \leq \gamma$.

Пример 3.3. Рассмотрим численный пример. Пусть дескрипторная система определяется следующими параметрами:

$$E = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.85 & -0.3 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} -0.02 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0.35 \quad 0.09], \quad D_w = 0.035, \quad D_u = 0.1.$$

Легко видеть, что ранговое условие выполнено, т.е. $\text{rank}(E) = \text{rank} \begin{bmatrix} E & B_w \end{bmatrix} = 1$. Система является причинной, но не является устойчивой ($\rho(E, A) = 1.0556$).

Найдем управление по состоянию и по полной информации в виде $u_{SF}(k) = F_2x(k)$ для заданных значений средней анизотропии входного возмущения a и для известной величины подавления γ , используя условия доказанной выше теоремы. Результаты синтеза субоптимальных анизотропийных регуляторов, а также анализ качества подавления внешних возмущений в замкнутой системе для различных регуляторов приведены в таблице 3.2.

3.2.3. Синтез субоптимального анизотропийного управления на основе выпуклой оптимизации

В данном разделе представим решение субоптимальной задачи анизотропийного управления с использованием строгих матричных неравенств. Будем рассматривать задачу субоптимального анизотропийного управления для системы (3.45)–(3.46) с $D_u = 0$.

Рассмотрим закон управления в виде

$$u = F_2x(k).$$

Тогда выражения для замкнутой системы запишутся как

$$Ex(k+1) = (A + B_u F_2)x(k) + B_w w(k), \quad (3.65)$$

$$z(k) = Cx(k) + D_w w(k) \quad (3.66)$$

Учитывая предположение о том, что система (3.45) является регулярной, мы можем найти две невырожденные матрицы \widetilde{W} и \widetilde{V} , которые преобразуют исходную систему (3.45)–(3.46) к эквивалентной форме (1.13)–(1.15). Ниже будем использовать следующие обозначения:

$$E_d = \widetilde{W}E\widetilde{V}, \quad A_d = \widetilde{W}A\widetilde{V}, \quad B_{wd} = \widetilde{W}B_w, \quad B_{ud} = \widetilde{W}B_u, \quad C_d = C\widetilde{V}, \quad D_{wd} = D_w.$$

Таблица 3.2. Результаты синтеза субоптимального анизотропийного регулятора при полном измерении состояния для различных уровней средней анизотропии

a	0.2	0.5	0.8
γ	0.050	0.055	0.060
$\ P_{cl}^{SF}\ _a$	0.0336	0.0422	0.0423
$\rho(E, A + B_u F_2)$	0.7611	0.7672	0.7631
γ^2	0.0025	0.0030	0.0036
η	0.0042	0.0038	0.0041
Φ	$\begin{bmatrix} 1.0468 & 0.7327 \\ 0.7327 & 0.5129 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0531 & 0.7372 \\ 0.7372 & 0.5160 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0489 & 0.7342 \\ 0.7342 & 0.5139 \end{bmatrix}$
F_2	[2.3498; -0.9]	[2.2956; -0.9]	[2.3319; -0.9]
$E^T \Phi E$	$\begin{bmatrix} 0.8479 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.8530 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.8496 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
M_2	0.0205	0.0205	0.0205
M_3	$-8.5629 \cdot 10^{-4}$	-0.0014	-0.0020

Для того, чтобы найти субоптимальный регулятор методами выпуклой оптимизации, для замкнутой системы (3.65)–(3.66) необходимо применить теорему 2.5 и выразить из переменных матрицу F_2 . Так как непосредственное применение теоремы 2.5 приводит к нелинейным выпуклым ограничениям, то получить регулятор с помощью алгоритмов не получится. Чтобы обойти этот недостаток, рассмотрим систему, двойственную к (3.65)–(3.66), которая будет иметь следующую реализацию в пространстве состояний:

$$E^T x'(k+1) = (A + B_u F)^T x'(k) + C^T w'(k), \quad (3.67)$$

$$z'(k) = B_w^T x'(k) + D_w^T w'(k), \quad (3.68)$$

Следует отметить, что для \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ норм в линейных системах выполняется условие двойственности, т.е. \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы исходной и двойственной систем совпадают. К сожалению, анизотропийная норма подобным свойством не обладает, однако в случае когда $m_1 \leq p$, требования, предъявляемые к величине анизотропийной нормы исходной замкнутой системы, могут быть выполнены и для системы, двойственной к ней.

Такая возможность согласуется с асимптотическим поведением анизотропийной нормы [265]:

$$\|\mathcal{P}\|_a \Big|_{a \rightarrow +0} = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \|\mathcal{P}\|_2 \left(1 + \sqrt{a \left(\frac{\|\mathcal{P}\|_4^4}{\|\mathcal{P}\|_2^4} - \frac{1}{m_1} \right)} + o(\sqrt{a}) \right), \quad (3.69)$$

$$\|\mathcal{P}\|_a \Big|_{a \rightarrow +\infty} = \|\mathcal{P}\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{2}{m_1} (a + J + o(1)) \right) \right), \quad (3.70)$$

где $J = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left(I_{m_1} - \|\mathcal{P}\|_\infty^{-2} \widehat{\mathcal{P}}^*(\omega) \widehat{\mathcal{P}}(\omega) \right) d\omega$ – энтропийный интеграл.

Из выражений (3.69) и (3.70) следует, что при $m_1 \leq p$ справедливо неравенство $\|\mathcal{P}_{cl}\|_a \leq \|\mathcal{P}'_{cl}\|_a$ как при $a \rightarrow +0$, так и при $a \rightarrow +\infty$. Кроме того, исходя из вида графика анизотропийной нормы системы в зависимости от уровня средней анизотропии входного возмущения и на основе ряда вычислительных экспериментов, можно выдвинуть гипотезу о том, что взаимное расположение

анизотропийных норм сопряженных систем в случае $m_1 \leq p$ сохраняется на всем интервале $a \in [0; +\infty)$.

Отметим, что если $p = m_1$, анизотропийные нормы двойственной и исходной систем равны, т.е. $\|\mathcal{P}_{cl}\|_a = \|\mathcal{P}'_{cl}\|_a$.

Теорема 3.4. *Рассмотрим систему (3.45)–(3.46). Предположим, что $\text{rank}(E^T) = \text{rank} \begin{bmatrix} E^T & C^T \end{bmatrix}$ и $m_1 \leq p$. Для заданных числа $\gamma > 0$ и уровня средней анизотропии входной возмущающей последовательности W $\bar{\mathbf{A}}(W) = a \geq 0$ замкнутая система P_{cl}^{SF} является допустимой, а ее анизотропийная норма удовлетворяет неравенству $\|P_{cl}^{SF}\|_a < \gamma$, если найдутся такие матрицы $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$, и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы неравенства*

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & \Lambda_{41}^T & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^T & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^T \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^T \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & -(Q + Q^T) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_{m_1} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.71)$$

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/p} < \gamma^2, \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p + C_d \Theta C_d^T & D_{wd}^T \\ D_{wd} & -I_{m_1} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.73)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Lambda_{21} = A_d \Gamma^T + B_{ud} Z^T \Omega^T, \\ \Lambda_{31} &= C_d \Gamma^T, \quad \Lambda_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^T, \\ \Lambda_{22} &= \Pi A_d^T + A_d \Pi^T + \Phi Z B_{ud}^T + B_{ud} Z^T \Phi^T - \Theta, \\ \Lambda_{52} &= B_{wd}^T, \quad \Lambda_{53} = D_{wd}^T, \quad \Lambda_{32} = C_d \Pi^T. \end{aligned}$$

Остальные обозначения определяются по формулам

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Тогда допустимый регулятор в форме статической обратной связи по состоянию может быть найден по формуле:

$$F_2 = Z^T \begin{bmatrix} Q^{-T} & 0 \\ -S^{-T} R^T Q^{-T} & S^{-T} \end{bmatrix} \tilde{V}^{-1}. \quad (3.74)$$

Доказательство. Покажем, что регулятор, который решает поставленную задачу субоптимального анизотропийного управления для системы во второй эквивалентной форме, также решает эту задачу для исходной системы. Учитывая свойство инвариантности передаточной функции относительно преобразования координат, имеем

$$\begin{aligned} P_d^{SF}(z) &= C\tilde{V}\tilde{V}^{-1}(zE - A - B_u F_2)^{-1}\tilde{W}^{-1}\tilde{W}B_w + D_w = \\ &= C\tilde{V}(z\tilde{W}E\tilde{V} - \tilde{W}A\tilde{V} - \tilde{W}B_u F_2\tilde{V})^{-1}\tilde{W}B_w + D_w = \\ &= C_d(zE_d - A_d - B_{ud}F_d)^{-1}B_{wd} + D_{wd}, \end{aligned}$$

где $F_d = F_2\tilde{V}$.

Предположим, что неравенства (3.71)–(3.73) справедливы. Тогда из блока (1,1) в левой части неравенства (3.71) следует, что матрица Q является обратной. Также предположим, что матрица S является невырожденной. Если это не выполнено, то всегда можно найти такое число $\epsilon \in (0; 1)$, что неравенство (3.71) выполнено для матрицы $\bar{S} = S + \epsilon I_{n-r}$. Таким образом, мы можем использовать матрицу \bar{S} вместо S . Заменяя переменную Z на введенное обозначение $\begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & S \end{bmatrix} F_d^T$ в (3.71), получаем условия анизотропийной частотной теоремы для системы, двойственной к (3.45)–(3.46). Таким образом, согласно анизотропийной частотной теореме, замкнутая система (3.47)–(3.48) является допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом γ .

Если задача управления разрешима, то условия теоремы 2.5 выполнены для системы (3.45)–(3.46). Эти условия также справедливы для двойственной системы. Используя линейную замену переменных $\begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & S \end{bmatrix} F_d^T = Z$, из ко-

торой следует, что $\begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix} F_d^T = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} Z$ и $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} F_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} Z$,
получаем неравенство (3.71).

Ранее было показано, что матрицы Q и S являются обратимыми. Таким образом, статическая обратная связь F_d для замкнутой системы, записанной во второй эквивалентной форме определяется выражением

$$F_d = Z^T \begin{bmatrix} Q^{-T} & 0 \\ -S^{-T} R^T Q^{-T} & S^{-T} \end{bmatrix}.$$

Путем обратной замены переменных получаем F_2 для системы (3.47)–(3.48) в форме (3.74). ■

Замечание 3.2. Для поиска минимального значения γ необходимо решить следующую оптимизационную проблему: необходимо найти $\xi_* = \min \xi$ на множестве переменных $\{L, Q, R, S, Z, \Psi, \eta, \xi\}$, удовлетворяющих системе неравенств (3.71)–(3.73). Здесь $\xi = \gamma^2$.

Проиллюстрируем эффективность метода на численном примере.

Пример 3.4. Пусть параметры системы равны:

$$E = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 & 3.3 & 0 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.9 & 0 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5001 & 0.1002 & 0.0005 & 0.5006 \\ 0.7 & 0.7941 & 3.2909 & 0.0006 & 0.6002 \\ 0.6 & 0.8 & 0.2999 & 0.0008 & 0.8004 \\ 0.7 & 0.4989 & 0.8978 & 0.001 & 1.0003 \\ 0.6 & 0.7 & 0.2998 & 0.0004 & 0.4013 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0.0003 & -0.0002 \\ -0.0058 & 0.0019 \\ 0.0002 & -0.0013 \\ -0.0013 & -0.0015 \\ 0.0001 & 0.0017 \end{bmatrix}, \quad B_w = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.1 & -0.125 \\ 0.2333 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \\ 0.2333 & 0.125 \\ 0.2 & 0.175 \end{bmatrix},$$

Таблица 3.3. Результаты синтеза управления для разных уровней анизотропии

a	0	0.1	0.2	0.5
$\ P_{cl}^{SF}\ _a$	0.2739	0.3266	0.3430	0.3662
$\rho(E, A + B_2F_2)$	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998
a	0.7	1	2	4.5
$\ P_{cl}^{SF}\ _a$	0.3711	0.3796	0.3855	0.3866
$\rho(E, A + B_2F_2)$	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Система не является причинной ($\deg \det(zE - A) = 3$, $\text{rank}(E) = 4$), а также не является устойчивой ($\rho(E, A) = 1.000$). Результаты синтеза управления представлены в таблице 3.3.

3.2.4. Синтез модального управления с анизотропийным критерием качества

Задача модального управления для дескрипторных систем решалась в различных работах [116, 137, 231]. Задание области расположения конечных полюсов линейной системы — это известная техника для получения желаемого вида переходных процессов. Методы выпуклой оптимизации позволяют с одной стороны задать желаемую область расположения конечных полюсов дескрипторной системы, а с другой стороны — позволяют налагать дополнительные критерии на систему. Ниже рассмотрим одну из таких задач — задачу анизотропийного субоптимального управления по состоянию с заданной областью расположения конечных полюсов замкнутой системы. Выше нами было рассмотрено понятие \mathfrak{D} -допустимости дескрипторной системы. Рассмотрим теперь постановку задачи модального управления с анизотропийным критерием

качества.

Задача 3.5. Для системы (3.45)–(3.46) и заданных чисел $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде статической обратной связи по состоянию

$$u(k) = F_2 x(k), \quad (3.75)$$

при котором замкнутая система

1. является \mathfrak{D} -допустимой;
2. ее анизотропийная норма для заданного a не превосходит величины γ , т.е.

$$\|P_{cl}\|_a < \gamma,$$

где $P_{cl}(z) = C(zE - A - B_u F_2)^{-1} B_w + D_w$ — передаточная функция замкнутой системы.

Теорема 3.5. Предположим, что

$$\text{rank } E = \text{rank} [E \ B_{wd}].$$

Пусть область \mathfrak{D} — диск с центром в начале координат комплексной плоскости с радиусом $0 < \omega < 1$. Для заданных чисел $\gamma > 0$, $0 < \omega < 1$ и $a \geq 0$ разомкнутая система (3.45)–(3.46) при $u(k) = 0$ является \mathfrak{D} -допустимой с обобщенным спектральным радиусом ω , а ее анизотропийная норма ограничена сверху числом γ , т.е. $\|P\|_a < \gamma$, если существуют такие матрицы $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X > 0$ и скалярная переменная $\eta > \gamma^2$, для которых выполняются неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det(\eta I_{m_1} - B_{wd}^T \Theta B_{wd} - D_{wd}^T D_{wd}))^{1/m_1} < \gamma^2, \quad (3.76)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & \Phi_{41}^T & 0 \\ A_d^T \Gamma^T & \Phi_{22} & \Pi B_{wd} & A^T \Gamma^T & \Phi_{52}^T \\ B_{wd}^T \Gamma^T & B_{wd}^T \Pi^T & -\gamma^2 I_{m_1} & B_{wd}^T \Gamma^T & \Phi_{53}^T \\ \Phi_{41} & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^T & 0 \\ 0 & \Phi_{52} & \Phi_{53} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (3.77)$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} A_d \\ -E_d \end{bmatrix} G \mathcal{U} \right) < 0, \quad (3.78)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Phi_{22} = \Pi A_d + A_d^T \Pi^T - \Theta, \\ \Phi_{41} &= L - Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Phi_{52} = C_d + \alpha C_d \Pi A_d, \\ \Phi_{53} &= D_{wd} + \alpha C_d \Pi B_{wd}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}, \\ G &= \begin{bmatrix} Q^T & 0 \\ R^T & S^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.79)$$

и

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Скалярный параметр $\alpha > 0$ предполагается достаточно большим.

Доказательство. Доказательство ограниченности анизотропийной нормы напрямую следует из теоремы 2.5. Нам необходимо доказать, что неравенство (3.78) гарантирует нахождение конечных полюсов разомкнутой системы внутри \mathfrak{D} -области, определяемой радиусом ω .

Предположим, что разомкнутая система (3.45)–(3.46) с $u(k) = 0$ является \mathfrak{D} -допустимой с областью \mathfrak{D} , определяемой радиусом ω , тогда неравенство (1.47) является справедливым для некоторой матрицы \bar{X} .

Умножая слева и справа выражение (1.47) на матрицы \bar{W} и \bar{W}^T соответственно, получаем

$$-\omega^2 \bar{W} E \bar{X} E^T \bar{W}^T + \bar{W} A \bar{X} A^T \bar{W}^T < 0. \quad (3.81)$$

Пусть $\bar{X} = \bar{V} X \bar{V}^T$. Такое представление сделать возможно для любой невырожденной матрицы \bar{V} . Пусть также матрицы \bar{W} и \bar{V} выбраны таким образом, что при умножении слева и справа (3.45) на \bar{W} и \bar{V} соответственно, система преобразуется ко второй эквивалентной форме. Принимая это во внимание, неравенство (3.81) можно переписать в виде

$$-\omega^2 E_d X E_d^T + A_d X A_d^T < 0. \quad (3.82)$$

Заметим также, что пара (E, A) является допустимой. Откуда следует обратимость матрицы A_{22} . Введем обозначения:

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad \bar{V} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

Представим новую матрицу $\hat{X} = \bar{W} X \bar{V}^T$ и умножим слева и справа выражение (3.82) на матрицы \bar{W} и \bar{V} соответственно. В результате получаем, что

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{X} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \hat{X} \begin{bmatrix} \hat{A}^T & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.83)$$

где $\hat{A} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

Пусть матрица \hat{X} разделена на блоки $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & \hat{X}_{12} \\ \hat{X}_{12}^T & \hat{X}_{22} \end{bmatrix}$, где $\hat{X}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$.

Из неравенства (3.83) следует, что $\hat{X}_{11} > 0$. Тогда неравенство (3.83) справедливо, если

$$-\omega^2 \hat{X}_{11} + \hat{A} \hat{X}_{11} \hat{A}^T < 0, \quad (3.84)$$

$$\hat{X}_{22} < 0. \quad (3.85)$$

Остановимся подробнее на неравенстве (3.84). Оно является строгим, поэтому существует достаточно малый скаляр μ , для которого справедливо

$$-\omega^2 \widehat{X}_{11} + \widehat{A} \widehat{X}_{11} \widehat{A}^T + \mu \omega^2 A_{12} A_{12}^T < 0. \quad (3.86)$$

Введем следующие матрицы:

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & -I_r & 0 \\ A_{12}^T & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что

$$\mathcal{N}_y = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}^T, \quad \mathcal{N}_z = \begin{bmatrix} I_r & -A_{12} & \widehat{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}^T$$

определяют базисы ядер матриц \mathcal{Y} и \mathcal{Z} соответственно. С учетом (3.86) справедливы следующие неравенства:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_y \Upsilon \mathcal{N}_y^T < 0, \\ \mathcal{N}_z^T \Upsilon \mathcal{N}_z < 0, \end{cases} \quad (3.87)$$

где

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} -\omega^2 \widehat{X}_{11} & -\mu \omega^2 A_{12} & 0 & 0 \\ -\mu \omega^2 A_{12}^T & -\mu \omega^2 I_{n-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{X}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Согласно лемме о проекции [241], существует такая матрица \mathcal{G} , для которой

$$\Upsilon + \text{He}(\mathcal{Z}^T \mathcal{G} \mathcal{Y}^T) < 0 \quad (3.88)$$

или

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\omega^2 \widehat{X}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\omega^2 I_{n-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{X}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu I_{n-r} \end{bmatrix} + \\ & + \text{He} \left(\mathcal{Z}^T \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu\omega^2 I_{n-r} \end{bmatrix} + \mathcal{G} \right) \mathcal{Y}^T \right) < 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Введем обозначение

$$\overline{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu\omega^2 I_{n-r} \end{bmatrix} + \mathcal{G}$$

и

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \widehat{X}_{11} & 0 \\ 0 & -\mu\omega^2 I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Тогда неравенство (3.89) можно переписать в виде:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \mathcal{Z}^T \overline{G} \mathcal{Y}^T + \mathcal{Y} \overline{G} \mathcal{Z} < 0. \quad (3.90)$$

Наконец, необходимо доказать, что матрица \overline{G} является невырожденной. Если \overline{G} вырождена, то существует такой ненулевой вектор $c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$, для которого $\overline{G}c = 0$. Пусть $c_1 \in \mathbb{R}^r$. Тогда умножение слева и справа неравенства (3.90) на $\begin{bmatrix} 0 & c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$ и его транспонирование дает нам $-c_2 X_{22} c_2^T + c_1 X_{11} c_1^T < 0$, что противоречит условиям $X_{11} > 0$ и $X_{22} < 0$.

Выбирая в качестве $\overline{G} = G$ и (3.79) и подставляя их в (3.90), получаем неравенство (3.78). Заметим также, что \mathfrak{D} -допустимость является более сильным свойством по отношению к обычной допустимости. Учитывая, что неравенство (3.77) гарантирует допустимость системы, выбор переменной в виде (3.79) не противоречит (3.77). ■

Задача синтеза 3.5 решается подобно стандартной задаче анизотропийного управления, рассмотренной в теореме 3.4 с использованием двойственной системы. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.6. Пусть область \mathfrak{D} — диск с центром в начале координат комплексной плоскости с радиусом $0 < \omega < 1$. Для заданных чисел $\gamma > 0$, $0 < \omega < 1$ и $a \geq 0$ задача 3.5 разрешима, если найдутся такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$ и $Z \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$, для которых справедливо выполнение неравенств

$$\eta - (e^{-2a} \det(\eta I_p - C_d \Theta C_d^T - D_{wd} D_{wd}^T))^{1/p} < \gamma^2, \quad (3.91)$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \text{He} \left(\left(\begin{bmatrix} A_d \\ -E_d \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B_{ud} \\ 0 \end{bmatrix} Z^T \right) \mathfrak{U} \right) < 0, \quad (3.92)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & \Lambda_{41}^T & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^T & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^T \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^T \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & -(Q + Q^T) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_{m_1} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.93)$$

где

$$\Lambda_{11} = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Lambda_{21} = A_d \Gamma^T + B_{ud} Z^T \Omega^T,$$

$$\Lambda_{31} = C_d \Gamma^T, \quad \Lambda_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^T,$$

$$\Lambda_{22} = \Pi A_d^T + A_d \Pi^T + \Phi Z B_{ud}^T + B_{ud} Z^T \Phi - \Theta,$$

$$\Lambda_{32} = C_d \Pi^T, \quad \Lambda_{52} = B_{wd}^T, \quad \Lambda_{53} = D_{wd}^T,$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Матрицы G и \mathcal{U} определяются из выражений (3.79) и (3.80) соответственно. Закон управления можно получить в виде:

$$F_2 = Z^T \begin{bmatrix} Q^{-T} & 0 \\ -S^{-T} R^T Q^{-T} & S^{-T} \end{bmatrix} \bar{V}^{-1}. \quad (3.94)$$

Доказательство. Представим замену переменных

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & S \end{bmatrix} F_d^T = Z. \quad (3.95)$$

Из выражения (3.95) следует, что

$$\begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix} F_d^T = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix} Z \text{ и } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} F_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} Z.$$

Учитывая линейную замену переменных (3.95) и подставляя ее в неравенство (3.78), получаем (3.92) для замкнутой системы (3.67)–(3.68). Аналогично, подстановка (3.95) в (3.77) дает нам блоки Λ_{21} и Λ_{22} в неравенстве (3.93), которые совпадают с условиями теоремы 3.5 для разомкнутой системы (3.67)–(3.68). Таким образом, согласно теореме 3.5, замкнутая система (3.45)–(3.46) является \mathfrak{D} -допустимой, а ее анизотропийная норма для заданного a ограничена сверху числом γ .

Кроме того из выполнения неравенства (3.93) следует обратимость матрицы Q . Обратимость матрицы S гарантируется выполнением (3.92). Таким образом, коэффициенты регулятора F_d определяются по формуле

$$F_d = Z^T \begin{bmatrix} Q^{-T} & 0 \\ -S^{-T} R^T Q^{-T} & S^{-T} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $F_d = F_2 \bar{V}$. Из последнего уравнения следует, что F_2 определяется в форме (3.94). ■

Пример 3.5. Пусть дескрипторная система имеет следующие параметры:

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4.7 & -3.25 & -0.7 & 0 \\ 0.8 & 0.4 & -6.4 & 2.6 \\ 1 & -1.9 & -5.4 & 2.4 \\ -0.6 & -2.7 & 5.4 & -2.8 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 3.2 & -3.5 \\ 2.5 & -7.9 \\ 3.8 & -7.6 \\ -1.2 & 8.2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1 \ 0 \ -1], \quad D_1 = [1.2 \ 1.3].$$

Система, рассматриваемая в примере, является причинной, но не является устойчивой. Конечные собственные значения системы равны $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{1.2523; \ 0.5994\}$.

В качестве цели рассмотрим синтез допустимого регулятора в форме статической обратной связи по состоянию, минимизирующего параметр γ для замкнутой системы для внешнего возмущающего воздействия с уровнем средней анизотропии $a = 0.2$, при котором все конечные собственные значения замкнутой системы будут лежать внутри круга радиуса $\omega = 0.5$.

Параметры искомого регулятора равны

$$F_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -2.9193 & 3.4906 & -3.8471 & 2.3996 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что замкнутая система является допустимой, а ее конечные собственные значения равны

$$\{\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}\} = \{-0.4744; \ 0.4997\}.$$

При этом анизотропийная норма замкнутой системы равна

$$\|P_{cl}^{(1)}\|_a = 4.4558.$$

Решение задачи минимизации параметра γ для замкнутой системы при управлении по состоянию без ограничений расположение конечных полюсов

замкнутой системы дает следующий результат:

$$F_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -6.2855 & 5.7999 & 12.8111 & -6.0253 \end{bmatrix}.$$

При этом конечные полюсы замкнутой системы равны

$$\{\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}\} = \{0.1443; \quad 0.6134\},$$

а анизотропийная норма замкнутой системы

$$\|P_{cl}^{(2)}\|_a = 4.1198.$$

Решение задачи синтеза допустимого модального регулятора без анизотропийного критерия дает следующие параметры регулятора [231]

$$F_2^{(3)} = \begin{bmatrix} -3.0863 & 4.6807 & -1.8345 & 1.2492 \end{bmatrix}.$$

Конечные полюсы замкнутой системы равны

$$\{\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}\} = \{0.0001; \quad 0.4532\},$$

а величина анизотропийной нормы равна

$$\|P_{cl}^{(3)}\|_a = 4.9568.$$

Таким образом, полученные условия позволяют одновременно эффективно управлять быстродействием замкнутой системы и обеспечивать нужный запас устойчивости с наилучшим подавлением внешних возмущений в смысле анизотропийной нормы.

Вычислительный пример показывает, что использование одного из критериев — минимизация анизотропийной нормы замкнутой системы или синтез модального управления — может не удовлетворять требованиям разработчика системы управления. Применение обоих критериев может существенно улучшить чувствительность системы к внешним возмущающим воздействиям при заданном быстродействии и запасе устойчивости.

Выводы к главе 3

В данной главе были поставлены и решены задачи оптимального и субоптимального анизотропийного управления для дескрипторных систем с точно известными параметрами. В случае оптимального управления решены задачи при полном и неполном измерении вектора состояния. В обоих случаях решение состоит в поиске параметров наилучшего формирующего фильтра и преобразования задачи синтеза анизотропийного регулятора к взвешенной \mathcal{H}_2 задаче оптимального управления. В отличие от задачи анализа, рассмотренной в главе 2, задача синтеза не может быть тривиальным образом сведена к аналогичной задаче для эквивалентной обыкновенной системы. В случае управления по состоянию, оптимальный анизотропийный регулятор может быть вычислен из решения связанных между собой двух обобщенных алгебраических уравнений Риккати, одного обобщенного уравнения Ляпунова и нелинейного уравнения относительно логарифма детерминанта положительно определенной матрицы. В случае же управления по выходной переменной необходимо провести каузализацию исходной дескрипторной системы.

К сожалению, поиск оптимальных анизотропийных регуляторов приводит к необходимости решать системы матричных нелинейных уравнений. В частности, в задаче синтеза оптимального анизотропийного регулятора по состоянию возникает необходимость решать обобщенные алгебраические уравнения Риккати. В настоящее время численные методы решения обобщенных алгебраических уравнений Риккати развиты плохо. Постановка и решение субоптимальных задач являются более привлекательными с точки зрения поиска численных решений, поскольку используются хорошо развитые в настоящий момент методы выпуклой оптимизации. В данном случае были получены решения субоптимальных задач управления при полном измерении вектора состояния. Такое ограничение связано с невозможностью построить строго неупреждающий регулятор по выходу для дискретной дескрипторной системы. Были поставлены

и решены как анизотропийная субоптимальная задача, так и задача с ограничением на расположение конечных собственных значений замкнутой системы. В обоих случаях были получены строгие выпуклые условия, которые легко алгоритмируются и являются вычислительно эффективными.

Глава 4. Анизотропийный анализ и синтез анизотропийных регуляторов для параметрически неопределенных дескрипторных систем

Интерес в исследовании робастной устойчивости и синтеза робастного управления дескрипторными системами с параметрическими неопределенностями появился в последние годы. Это связано с тем, что неопределенности всегда присутствуют в реальных системах, что приводит к снижению качества управления и даже потере устойчивости в тех случаях, когда закон управления не учитывает влияние возможных неопределенностей. В настоящей главе будут рассмотрены задачи робастного анализа и синтеза робастных законов управления для дескрипторных систем с анизотропийным функционалом качества.

4.1. Общая постановка задачи анализа и управления

Пусть дескрипторная система задана в пространстве состояний в следующем виде:

$$Ex(k+1) = A_{\Delta}x(k) + B_{\Delta w}w(k) + B_{\Delta u}u(k), \quad (4.1)$$

$$y(k) = C_{\Delta}x(k) + D_{\Delta w}w(k), \quad (4.2)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $w(k) \in \mathbb{R}^q$ — случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — выход системы, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ — управление. Матрица E является

вырожденной, т.е. $\text{rank}(E) = r < n$.

Матрицы системы представимы в следующем виде: $A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_{\Delta w} = B_w + M_B^w \Delta N_B^w$, $B_{\Delta u} = B_u + M_B^u \Delta N_B^u$, $C_\Delta = C + M_C \Delta N_C$, $D_{\Delta w} = D_w + M_D \Delta N_D$. Здесь матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ — неизвестная матрица с ограниченной нормой $\Delta^T \Delta \leq I_s$.

Предполагается также, что для всех возможных неопределенностей система (4.1)–(4.2) является регулярной: $\forall \Delta \exists \lambda \neq 0 : \det(\lambda E^d - A_\Delta^d) \neq 0$. В противном случае можно применить различные техники регуляризации системы, описанные, например, в [91, 92, 93].

Введем понятия робастной устойчивости и робастной допустимости дескрипторной системы:

Определение 4.1. *Дескрипторная система с реализацией в пространстве состояний (4.1)–(4.2) является робастно устойчивой (робастно допустимой), если она является устойчивой (допустимой) при всех значениях Δ из множества $\Delta^T \Delta \leq I_s$.*

Определение 4.2. *Система с реализацией в пространстве состояний (4.1)–(4.2) является робастно стабилизируемой, если существует закон управления в форме статической обратной связи по состоянию $f(k) = F_{st}x(k)$, при котором пара матриц $(E, A_\Delta^d + B_u^d F_{st})$ робастно устойчива.*

Определение 4.3. *Пара матриц (E^d, A_Δ^d) называется робастно допустимой (\mathfrak{D} -допустимой), если она является причинной, устойчивой, а все конечные собственные значения пучка матриц $(\lambda E^d - A_\Delta^d)$ лежат внутри единичного круга (внутри области \mathfrak{D} из единичного круга) комплексной плоскости для всех Δ из заданного множества.*

Система (4.1)–(4.2) преобразуется во вторую эквивалентную форму с использованием следующих обозначений

$$A_d = \bar{W} A \bar{V}, B_{wd} = \bar{W} B_w = \begin{bmatrix} B_{w1}^d \\ B_{w2}^d \end{bmatrix}, B_{ud} = \bar{W} B_u, C_d = C \bar{V} = \begin{bmatrix} C_1^d & C_2^d \end{bmatrix},$$

$$D_{wd} = D_w, M_A^d = \bar{W}M_A, N_A^d = N_A\bar{V}, M_B^{wd} = \bar{W}M_B^w = \begin{bmatrix} M_{B1}^{wd} \\ M_{B2}^{wd} \end{bmatrix}, N_B^{wd} = N_B^w, \\ M_B^{ud} = \bar{W}M_B^u, N_B^{ud} = N_B^u, M_C^d = M_C, N_C^d = N_C\bar{V} = \begin{bmatrix} N_{C1}^d & N_{C2}^d \end{bmatrix},$$

Предположим, что

$$\text{rank}(E^T) = \text{rank}[E^T, C^T, N_C^T], \quad (4.3)$$

$$\text{rank}(E) = \text{rank}[E, B_w, M_B^w]. \quad (4.4)$$

Введем определение анизотропийной нормы для системы с неопределенностями.

Определение 4.4. Пусть выход Y определяется выражением $Y = P_\Delta W$, где P_Δ — оператор системы, задаваемой уравнениями (4.1)–(4.2). Анизотропийной нормой системы с параметрическими неопределенностями будем называть норму оператора P_Δ , определяемую следующим соотношением:

$$\|P_\Delta\|_a = \sup_{\Delta: \Delta^T \Delta \leq I_s} \sup_{W \in \bar{\mathbf{A}}(W) \leq a} \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}.$$

Ниже будут рассмотрены следующие задачи:

Задача 4.1. Для системы с реализацией в пространстве состояний (4.1)–(4.2) и ограниченных по норме неопределенностей требуется проверить свойство робастной допустимости и выполнение ограниченности анизотропийной нормы системы в виде:

$$\|P_\Delta\|_a < \gamma$$

для известных числовых значений $a \geq 0$ и $\gamma > 0$.

Задача 4.2. Для системы с реализацией в пространстве состояний (4.1)–(4.2) и известного уровня средней анизотропии входного возмущения $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$, ($a \geq 0$) требуется построить закон управления $u(k) = Kx(k)$, который делает систему робастно допустимой (\mathfrak{D} -допустимой) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы оператора замкнутой системы $\gamma > 0$.

4.2. Анизотропийный анализ дескрипторных систем с неопределенностями

При решении задачи анализа предполагаем, что управление на входе отсутствует, т.е. $u(k) \equiv 0$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. [40] Для заданных чисел $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ система (4.1)–(4.2) является робастно допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом γ , т.е.

$$\|P_{\Delta}\|_a < \gamma,$$

если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $\Upsilon \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\Upsilon > 0$, которые удовлетворяют следующим ограничениям

$$\Upsilon L = I_r, \quad (4.5)$$

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m_1} < \gamma^2, \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U} + \varepsilon_1 N_1^T N_1 & M_1 \\ M_1^T & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon_2 N_2^T N_2 & M_2 \\ M_2^T & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.8)$$

Здесь

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_1} & D_{wd}^T & (B_{w1}^d)^T \\ D_{wd} & -I_p & 0 \\ B_{w1}^d & 0 & -\Upsilon \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_D & 0 \\ 0 & M_{B1}^{wd} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_D & 0 & 0 \\ N_B^{wd} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & L^T - Q^T - \frac{1}{2}Q & 0 \\ A_d^T \Gamma^T & \Pi A_d + A_d^T \Pi^T - \Theta & \Pi B_{wd} & A_d^T \Gamma^T & C_d^T \\ B_{wd}^T \Gamma^T & B_{wd}^T \Pi^T & -\eta I_q & B_{wd}^T \Gamma^T & D_{wd}^T \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^T & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^T & 0 \\ 0 & C_d & D_{wd} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ \Pi M_A^d & \Pi M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C^d & M_D \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & N_C^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Согласно предположениям (4.3) и (4.4) получаем, что $B_{w2} = 0$ и $C_2 = 0$. Можно проверить, что в выражении (2.94) $\alpha C_d \Pi A_d = 0$ и $\alpha C_d \Pi B_{wd} = 0$. Рассмотрим неравенство (2.93) из теоремы 2.5. Учитывая, ранговое ограничение (4.4) и $B_{w2} = 0$, выражение $B_{\Delta w}^T \Theta B_{\Delta w}$ переписется в виде:

$$\begin{aligned} B_{\Delta w}^T \Theta B_{\Delta w} &= \begin{bmatrix} (B_{w1} + M_B^{wd} \Delta N_B^{wd})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{w1} + M_{B1}^{wd} \Delta N_B^{wd} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= (B_{w1} + M_{B1}^{wd} \Delta N_B^{wd})^T L (B_{w1} + M_{B1}^{wd} \Delta N_B^{wd}) > 0. \end{aligned}$$

Обозначим $B_{\Delta w1} = B_{w1} + M_{B1}^{wd} \Delta N_B^{wd}$. Тогда неравенство (2.93) для системы (4.1)–(4.2) приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_q + (B_{\Delta w1})^T L B_{\Delta w1} & D_{\Delta w}^T \\ D_{\Delta w} & -I_p \end{bmatrix} < 0.$$

Применяя дополнение по Шуру к последнему неравенству и учитывая обозначение $\Upsilon = L^{-1}$, имеем

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_1} & D_{\Delta w}^T & (B_{\Delta w 1})^T \\ D_{\Delta w} & -I_p & 0 \\ B_{\Delta w 1} & 0 & -\Upsilon \end{bmatrix} < 0. \quad (4.10)$$

Запишем неравенство (4.10) в развернутой форме. Получим:

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_q & (D_{wd} + M_D \Delta N_D)^T & (B_{w1} + M_{B1}^{wd} \Delta N_B^{wd})^T \\ D_{wd} + M_D \Delta N_D & -I_p & 0 \\ B_{w1} + M_{B1}^{wd} \Delta N_B^{wd} & 0 & -\Upsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

или

$$\mathfrak{U} + \text{He}(M_1 \Delta N_1) < 0. \quad (4.12)$$

Используя дополнение по Шуру и лемму Петерсена, неравенство (4.12) переписывается в виде (4.33).

Преобразуем теперь выражение (2.94):

$$\Sigma + \text{He}(M_2 \Delta N_2) < 0. \quad (4.13)$$

Аналогичным образом, применяя лемму Петерсена и дополнение по Шуру к неравенству (4.13), получаем

$$\begin{aligned} \Sigma + \frac{1}{\varepsilon_2} M_2 M_2^T + \varepsilon_2 N_2^T N_2 &< 0, \\ \Sigma + \varepsilon_2 N_2^T N_2 - M_2 (-\varepsilon_2 I)^{-1} M_2^T &< 0, \\ \begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon_2 N_2^T N_2 & M_2 \\ M_2^T & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} &< 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство совпадает с (4.42). Выражение (4.32) эквивалентно (2.92), что завершает доказательство. ■

Взаимнообратные матрицы могут быть найдены с помощью алгоритма, описанного в [2]. Тогда алгоритм оценки верхней границы анизотропийной нормы системы с неопределенностями можно сформулировать следующим образом.

Алгоритм 4.1.

Шаг 1. Задаем $j = 0$, выбираем матрицы $G_1 = G_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $G_2 = G_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Шаг 2. Решаем оптимизационную задачу

$$\{\lambda_*, \xi_*\} = \min\{\lambda + \xi\}$$

на множестве

$$\{\eta, \xi, \lambda, \Phi, \Psi, \Pi, Y, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

при ограничениях (5.74)–(5.76) и

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_n & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & I_n \\ I_n & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ G_1 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} G_2 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & I_n \\ I_n & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 \\ I_n \end{bmatrix} - \lambda I_{2n} < 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & I_n \\ I_n & -\Pi \end{bmatrix} - \lambda I_{2n} < 0. \quad (4.15)$$

Шаг 3. Если $\lambda_* < \delta$, где δ — заданная точность вычисления, тогда

$$\|P_\Delta\|_a \approx \sqrt{\xi_*},$$

алгоритм останавливается, иначе переходим на следующий шаг.

Шаг 4. Задаем $G_1 = -\Pi_j^{-1}$, $G_2 = -\Phi_j^{-1}$, $j = j + 1$. Переходим на шаг 2.

Условия, сформулированные в теореме 4.1 являются невыпуклыми. Это приводит к проблеме поиска взаимнообратных матриц, увеличения числа переменных и времени вычисления. Избавиться от невыпуклости поможет следующий прием. Рассмотрим неравенство

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_q & \star & \star \\ D_{wd} + M_D \Delta N_D & -I_p & \star \\ B_{w1} + M_{B1}^{wd} \Delta N_B^{wd} & 0 & -L^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

Введем невырожденную матричную переменную $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$ и умножим неравенство (4.16) слева и справа на матрицу $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix}$ и ее транспонированную соответственно. Получим:

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_q & \star & \star \\ D_{wd} + M_D \Delta N_D & -I_p & \star \\ HB_{w1} + HM_{B1}^{wd} \Delta N_B^{wd} & 0 & -HL^{-1}H^T \end{bmatrix} < 0. \quad (4.17)$$

Заметим также, что $L > 0$. Тогда из выполнения неравенства

$$-(H - L)^T L^{-1} (H - L) \leq 0$$

следует, что $-HL^{-1}H^T \leq -H - H^T + L$. Таким образом, теорему 4.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4.2. [44] Для заданных чисел $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ система (4.1)–(4.2) является робастно допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена числом γ , т.е. $\|P_\Delta\|_a < \gamma$, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$, для которых справедливы матричные неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/q} < \gamma^2, \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U} + \varepsilon_1 N_1^T N_1 & M_1 \\ M_1^T & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.19)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon_2 N_2^T N_2 & M_2 \\ M_2^T & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.20)$$

Здесь

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_q & D_{wd}^T & (B_{w1}^d)^T H^T \\ D_{wd} & -I_p & 0 \\ HB_{w1}^d & 0 & -H - H^T + L \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_D & 0 \\ 0 & HM_{B1}^{wd} \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} N_D & 0 & 0 \\ N_B^{wd} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & L^T - Q^T - \frac{1}{2}Q & 0 \\ A_d^T \Gamma^T & \Pi A_d + A_d^T \Pi^T - \Theta & \Pi B_{wd} & A_d^T \Gamma^T & C_d^T \\ B_{wd}^T \Gamma^T & B_{wd}^T \Pi^T & -\eta I_q & B_{wd}^T \Gamma^T & D_{wd}^T \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^T & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^T & 0 \\ 0 & C_d & D_{wd} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ \Pi M_A^d & \Pi M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C^d & M_D \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & N_C^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Ниже рассмотрим вычислительную эффективность предложенных методов при оценке верхней границы анизотропийной нормы неопределенной системы.

Пример 4.1. Рассмотрим гидравлическую систему с тремя баками, представленную на рис. 4.1 [48]. Линеаризованная дискретная модель в пространстве состояний имеет вид:

$$Eq(k+1) = Aq(k) + B_u u(k) + B_\xi \xi(k), \quad (4.22)$$

$$y(k) = Cq(k) + 0.3\eta(k), \quad (4.23)$$

где $q(k)$ — вектор, представляющий объемы жидкости в баках, $u(k)$ — поток, создаваемый насосом, $\xi(k)$ — случайное возмущение, воздействующее на объект управления, $\eta(k)$ — шум измерений. Матрицы в уравнениях (4.22)–(4.23)

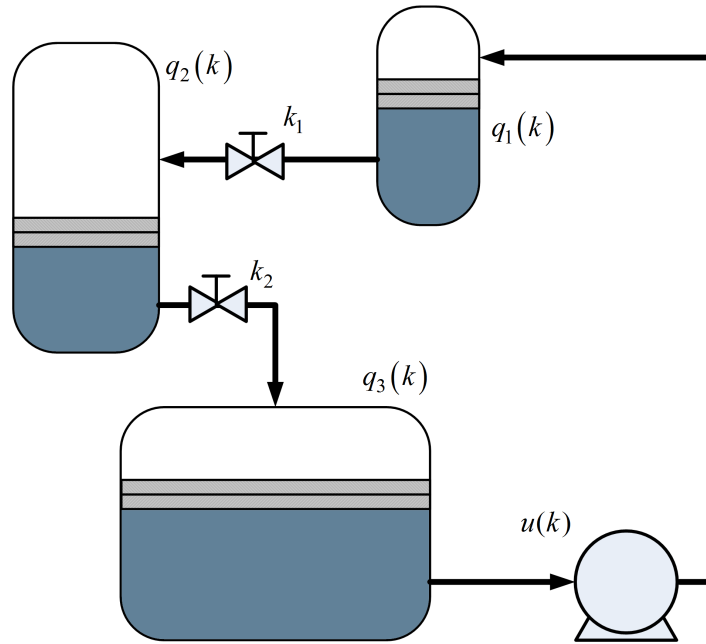


Рис. 4.1. Гидравлическая система из трех баков.

имеют вид:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.9692 & 0 & 0 \\ 0.0095 & 0.9867 & 0 \\ & 1 & 2.3328 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0.056 \\ 0.003 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_\xi = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{Введем обозначение } w = [\xi \ \eta]^T. \text{ Тогда } B_1 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Пусть неопределенности выражаются через матрицы:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.01 & 0.03 \end{bmatrix}^T \quad N_A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad N_B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_C = 1,$$

$$N_C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_D = 0, \quad N_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

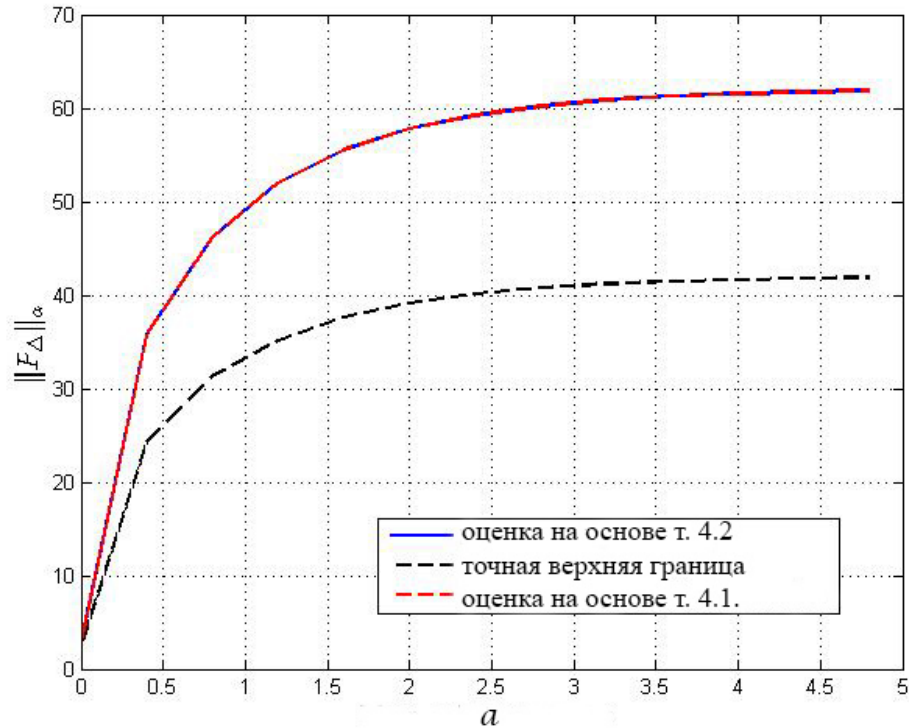


Рис. 4.2. Анизотропийный анализ системы с использованием разных теорем.

Можно проверить, что система является робастно допустимой для всех значений $\Delta \in [-1; 1]$.

На рис. 4.2 синяя сплошная линия показывает результаты оценки анизотропийной нормы на основе минимизации γ с использованием теоремы 4.2, красная пунктирная линия представляет собой метод вычисления на основе результата с использованием взаимно обратных матриц из теоремы 4.1, черная линия показывает точную верхнюю границу анизотропийной нормы системы. Заметим, что точная верхняя граница анизотропийной нормы системы была вычислена следующим образом. Отрезок $[-1; 1]$ был поделен на сетку с шагом $h = 10^{-3}$, для каждого узла сетки фиксировалось число Δ_h , после чего применялась процедура вычисления анизотропийной нормы с помощью теоремы 2.5. Наибольшее значение, полученное на отрезке $[-1; 1]$ полагалось точной границей анизотропийной нормы.

Как видно из рис. 4.2, теоремы 4.1 и 4.2 дают близкие результаты. При этом

использование теоремы 4.2 является более предпочтительным с вычислительной точки зрения, т.к. в данном случае меньше число неизвестных переменных и не нужен вычислительный цикл для поиска взаимнообратных матриц.

4.3. Синтез робастного анизотропийного управления для систем с неопределенностью

Прежде чем перейти к решению задачи синтеза, предположим, что

A1. $p \leq q$;

A2. $\text{rank } E = \text{rank} [E \ B_w \ M_B]$;

A3. $\text{rank } E^T = \text{rank} [E^T \ C^T \ (N_C)^T]$;

Внешнее возмущение $w(k)$ предполагается случайной стационарной последовательностью с нулевым математическим ожиданием, уровнем средней анизотропии которого ограничен известным неотрицательным числом a : $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$.

Результат, сформулированный ниже, получен на основе теоремы 4.2, так как ее условия являются выпуклыми. Решение задачи синтеза также опирается на использование двойственной системы и предположения о том, что анизотропийная норма исходной системы при $p \leq q$ не превосходит анизотропийную норму двойственной ей системы.

Теорема 4.3. *Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора в виде $u(k) = Fx(k)$ для системы (4.1)–(4.2) для заданных чисел $\gamma > 0$ и $a > 0$ ($\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$) разрешима, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$,*

$L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$, and $Z \in \mathbb{R}^{n \times m}$, для которых справедливы неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/p} < \gamma^2, \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U} + \varepsilon_1 N_1 N_1^T & M_1^T \\ M_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.25)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda + \varepsilon_2 M_2^T M_2 & N_2 \\ N_2^T & -\varepsilon_2 I_{5s} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.26)$$

Здесь

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p & D_{wd} & C_1^d H \\ D_{wd}^T & -I_q & 0 \\ H^T (C_1^d)^T & 0 & -H - H^T + L \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} (M_D)^T & 0 & 0 \\ (M_C^d H)^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (N_D)^T & 0 \\ 0 & (N_{C1}^d)^T \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & (M_A^d)^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M_B^{ud})^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_C^d)^T & 0 & 0 \\ 0 & (M_B^{wd})^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_D^w)^T & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \Gamma (N_A^d)^T & \Omega Z (N_B^{ud})^T & \Gamma (N_C^d)^T & 0 & 0 \\ \Pi (N_A^d)^T & \Phi Z (N_B^{ud})^T & \Pi (N_C^d)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma (N_A^d)^T & \Omega Z (N_B^{ud})^T & \Gamma (N_C^d)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (N_B^{wd})^T & (N_D^w)^T \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & \Lambda_{41}^T & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^T & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^T \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^T \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & -(Q + Q^T) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{11} = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Lambda_{21} = A_d \Gamma^T + B_{ud} Z^T \Omega^T,$$

$$\Lambda_{31} = C_d \Gamma^T, \quad \Lambda_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^T,$$

$$\Lambda_{22} = \Pi A_d^T + A_d \Pi^T + \Phi Z B_{ud}^T + B_{ud} Z^T \Phi^T - \Theta,$$

$$\Lambda_{32} = C_d \Pi^T, \quad \Lambda_{52} = B_{wd}^T, \quad \Lambda_{53} = D_{wd}^T.$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Закон управления можно найти по формуле

$$F = Z^T \begin{bmatrix} Q^{-T} & 0 \\ -S^{-T} R^T Q^{-T} & S^{-T} \end{bmatrix} \bar{V}^{-1}. \quad (4.27)$$

Доказательство теоремы 4.3 аналогично доказательству теоремы 3.4 и поэтому не приводится.

Заметим также, что теорема 4.3 дает достаточные условия существования закона управления. Робастная допустимость замкнутой системы гарантируется за счет существования квадратичной функции Ляпунова, фигурирующей в неявном виде в неравенстве (4.38).

Пример 4.2. Пусть параметры системы равны:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2.02 & 0.99 & 3 & 3 \\ 0.02 & 0.97 & 0.5 & 1 \\ 1.04 & 1.95 & -1 & -1 \\ -1.94 & 2.89 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 5.9 \\ 2.3 \\ 1.15 \\ 4.05 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.1 \\ -0.2 & 0 \\ 0 & 0.33 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.07 \\ 0.09 & 0.12 \end{bmatrix},$$

Неопределенность в матрице A выражается неизвестным параметром $\Delta \in [-1; 1]$ и коэффициентами

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}^T, \quad N_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Система не является ни причинной, ни устойчивой. Можно проверить, что все предположения **A1–A3** выполнены. При этом, обобщенный спектральный радиус номинальной системы равен $\rho(E, A) = 1.054$.

Предположим, что уровень средней анизотропии равен $a = 0.2$. Целью задачи синтеза является поиск регулятора, на котором достигается наименьшее возможное значение γ , при которых выполнены условия теоремы 4.3.

В результате решения оптимизационной задачи по поиску минимального значения γ , были получены следующие результаты: $\bar{\gamma}_{\min} = 9.0370$, а параметры регулятора равны

$$F_{\text{rob}} = \begin{bmatrix} -0.2460 & -0.1821 & 0.6837 & 0.0172 \end{bmatrix}.$$

Точные верхняя и нижняя границы анизотропийной нормы замкнутой системы равны соответственно $\underline{\gamma} = 1.5419$ и $\bar{\gamma} = 6.0066$ (метод вычисления описан в примере 4.1). Таким образом, цель управления достигнута. Расположение конечных собственных значений замкнутой системы регулятором F_{rob} при различных значениях неопределенностей показаны на рис. 4.3. На графиках видно, что собственные значения не выходят за границы единичного круга при всех возможных неопределенностях $\Delta \in [-1; 1]$.

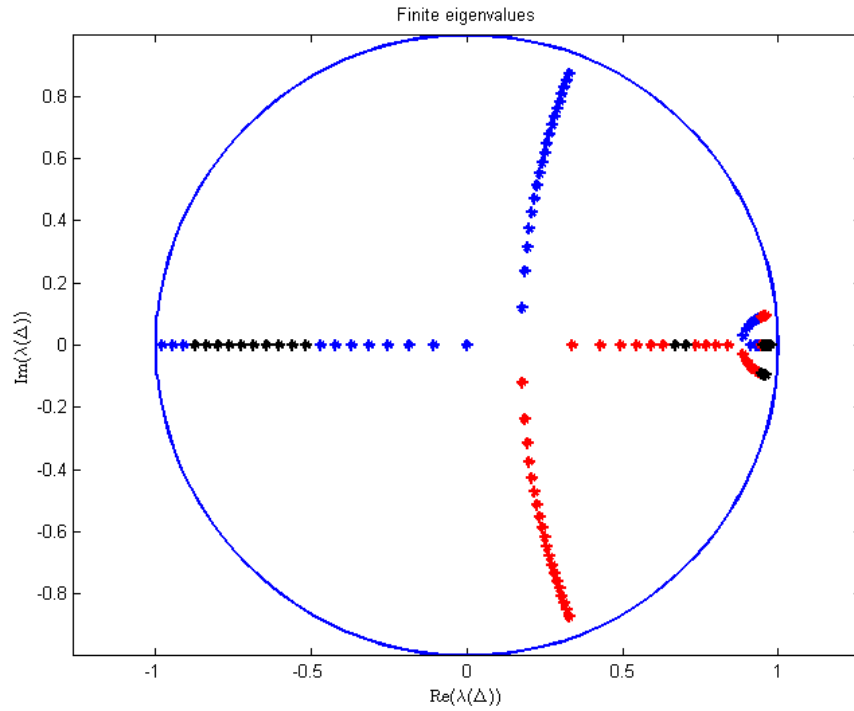


Рис. 4.3. Конечные собственные значения системы с управлением F_{rob} .

Для сравнения также был синтезирован γ -оптимальный регулятор для номинальной системы с тем же значением уровня средней анизотропии. При решении задачи синтеза был получен следующий регулятор

$$F_{\text{nom}} = \begin{bmatrix} -0.1942 & -0.1109 & 0.3419 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система с неопределенностями, замкнутая законом управления $u(k) = F_{\text{nom}}x(k)$ может терять устойчивость. Расположение конечных собственных значений замкнутой системы регулятором F_{nom} при различных значениях неопределенностей показаны на рис. 4.4. На графиках видно, что существуют такие значения неопределенностей, при которых обобщенный спектральный радиус замкнутой системы выходит за границы единичного круга, что соответствует неустойчивой системе.

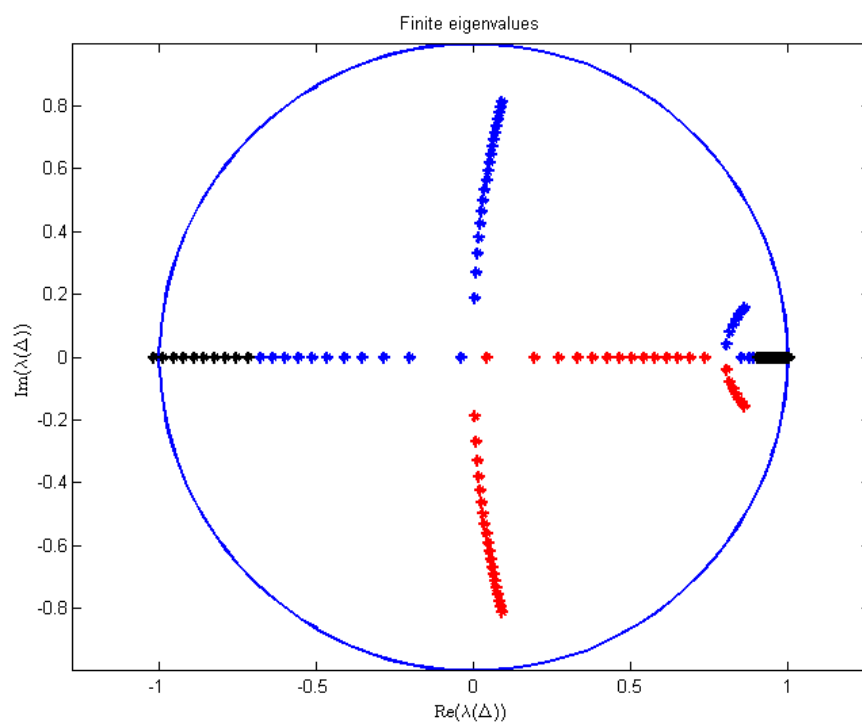


Рис. 4.4. Конечные собственные значения системы с управлением $F_{\text{ном}}$.

4.4. Синтез робастного модального управления с анизотропийным критерием качества

Рассмотрим область на комплексной плоскости, определяемой выражением

$$\mathfrak{D} = \{z \in \mathbb{C} : d + 2b\Re(z) + c|z|^2 < 0\}. \quad (4.28)$$

Здесь b , c и d — известные постоянные величины. Предположим также, что \mathfrak{D} — диск с центром в начале координат и радиуса $\omega < 1$, т.е. $d = -\omega^2$, $b = 0$ и $c = 1$.

Задачу робастного анизотропийного управления с заданным расположением конечных собственных значений можно сформулировать следующим образом.

Задача 4.3. *Для системы (4.1)–(4.2) и заданных чисел $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в форме*

$$u(k) = Fx(k), \quad (4.29)$$

при котором замкнутая система

$$Ex(k+1) = (A_\Delta + B_{\Delta u}F)x(k) + B_{\Delta w}w(k), \quad (4.30)$$

$$z(k) = C_\Delta x(k) + D_{\Delta w}w(k) \quad (4.31)$$

является робастно \mathfrak{D} -допустимой, а ее анизотропийная норма не превосходит уровень γ , т.е.

$$\|P_\Delta\|_a < \gamma.$$

По аналогии с рассмотренными ранее задачами, прежде чем решить задачу синтеза, найдем условия, при которых разомкнутая система является робастно \mathfrak{D} -допустимой, а ее анизотропийная норма ограничена сверху числом γ . Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.4. [41] *Для заданных чисел $a \geq 0$, $0 < \omega < 1$ и $\gamma > 0$ система (4.1)–(4.2) является робастно \mathfrak{D} -допустимой, а ее анизотропийная норма*

удовлетворяет неравенству $\|P_\Delta\|_a < \gamma$ с обобщенным спектральным радиусом, не превосходящим ω , если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$ и $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, для которых справедливы неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m_1} < \gamma^2, \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} \$ + \varepsilon_1 N_1^T N_1 & M_1 \\ M_1^T & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon_2 N_2^T N_2 & M_2 \\ M_2^T & -\varepsilon_2 I_{5s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_3 M_3 M_3^T & N_3^T \\ N_3 & -\varepsilon_3 I_s \end{bmatrix} < 0. \quad (4.35)$$

Здесь

$$\$ = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & D_{wd}^T & B_{w1}^T H^T \\ D_{wd} & -I_p & 0 \\ HB_{w1} & 0 & -H - H^T + L \end{bmatrix},$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} A \\ -E \end{bmatrix} G U \right),$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_D & 0 \\ 0 & HM_{B1}^{wd} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_D & 0 & 0 \\ N_B^{wd} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & L^T - Q^T - \frac{1}{2}Q & 0 \\ A_d^T \Gamma^T & \Pi A_d + A_d^T \Pi^T - \Theta & \Pi B_{wd} & A_d^T \Gamma^T & C_d^T \\ B_{wd}^T \Gamma^T & B_{wd}^T \Pi^T & -\eta I_q & B_{wd}^T \Gamma^T & D_{wd}^T \\ L - Q - \frac{1}{2}Q^T & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^T & 0 \\ 0 & C_d & D_{wd} & 0 & -I_p \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ \Pi M_A^d & \Pi M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C^d & M_D \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & N_C^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} M_A^d \\ 0 \end{bmatrix}, N_3 = N_A^d G \mathcal{U}.$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{bmatrix}, \mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Доказательство. Идея доказательства схожа с доказательством теоремы 4.2. Неравенство (4.35) получается аналогичным образом, путем подстановки в неравенство (3.78) неопределенных параметров системы, выделения неопределенностей в отдельное слагаемое и применение дополнения по Шуру и леммы Петерсена. ■

Для решения задачи синтеза, необходимо рассмотреть замкнутую систему, двойственную к системе (4.30)–(4.31). При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 4.5. Для заданных чисел $a \geq 0$, $0 < \omega < 1$ и $\gamma > 0$ задача 4.3 разрешима, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$ и матрицы $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$ и $Z \in \mathbb{R}^{n \times m}$, для которых справедливы неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/p} < \gamma^2, \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} \$ + \varepsilon_1 M_1^T M_1 & N_1 \\ N_1^T & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.37)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda + \varepsilon_2 M_2^T M_2 & N_2 \\ N_2^T & -\varepsilon_2 I_{5s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_3 M_3 M_3^T & N_3^T \\ N_3 & -\varepsilon_3 I_s \end{bmatrix} < 0. \quad (4.39)$$

Здесь

$$M_1 = \begin{bmatrix} (M_D)^T & 0 & 0 \\ (M_{CH})^T & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (N_D)^T & 0 \\ 0 & (N_{C1})^T \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & (M_A^d)^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M_B^{ud})^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_C^d)^T & 0 & 0 \\ 0 & (M_B^{wd})^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_D^w)^T & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \Gamma (N_A^d)^T & \Omega Z (N_B^{ud})^T & \Gamma (N_C^d)^T & 0 & 0 \\ \Pi (N_A^d)^T & \Phi Z (N_B^{ud})^T & \Pi (N_C^d)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma (N_A^d)^T & \Omega Z (N_B^{ud})^T & \Gamma (N_C^d)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (N_B^{wd})^T & (N_D^w)^T \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} M_A^d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_3 = N_A^d G \mathcal{U},$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\omega^2 X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} + \text{He} \left(\left(\left(\begin{bmatrix} A \\ -E \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} Z^T \right) \mathcal{U} \right) \right),$$

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_p & D_{wd} & C_1 H \\ D_{wd}^T & -I_q & 0 \\ H^T C_1^T & 0 & -H - H^T + L \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & \Lambda_{41}^T & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^T & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^T \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\eta I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^T \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & -(Q + Q^T) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{11} = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Lambda_{21} = A_d \Gamma^T + B_{ud} Z^T \Omega^T,$$

$$\Lambda_{31} = C_d \Gamma^T, \quad \Lambda_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^T,$$

$$\Lambda_{22} = \Pi A_d^T + A_d \Pi^T + \Phi Z B_{ud}^T + B_{ud} Z^T \Phi^T - \Theta,$$

$$\Lambda_{32} = C_d \Pi^T, \quad \Lambda_{52} = B_{wd}^T, \quad \Lambda_{53} = D_{wd}^T.$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

$$G = \begin{bmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Коэффициенты обратной связи при этом можно вычислить по формуле

$$F = Z^T \begin{bmatrix} Q^{-T} & 0 \\ -S^{-T} R^T Q^{-T} & S^{-T} \end{bmatrix} \bar{V}^{-1}.$$

Доказательство теоремы 4.5 аналогично доказательству теоремы 3.4 и поэтому не приводится.

Пример 4.3. Параметры системы имеют вид:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2.02 & 0.99 & 3 & 3 \\ 0.02 & 0.97 & 0.5 & 1 \\ 1.04 & 1.95 & -1 & -1 \\ -1.94 & 2.89 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 5.9 \\ 2.3 \\ 1.15 \\ 4.05 \end{bmatrix},$$

$$B_w^d = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.1 \\ -0.2 & 0 \\ 0 & 0.33 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.07 \\ 0.09 & 0.12 \end{bmatrix},$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad (N_A)^T = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $\Delta \in [-1, 1]$ — неопределенный скалярный параметр.

Система не является ни причинной, ни устойчивой. Можно проверить, что все предположения **A1–A3** выполнены. При этом обобщенный спектральный радиус номинальной системы равен $\rho(E, A) = 1.054$.

Предположим, что уровень средней анизотропии равен $a = 0.2$. Целью задачи синтеза является поиск регулятора, на котором достигается наименьшее возможное значение γ , при отсутствии ограничений на расположение конечных собственных значений замкнутой системы и при ограничении $\omega = 0.6$. Графики расположения конечных собственных значений замкнутой системы с ограничением на область расположения конечных собственных значений и без ограничений показаны на рис. 4.5 и рис. 4.6 соответственно.

Максимальный обобщенный спектральный радиус для замкнутой системы без ограничения на область расположения конечных собственных значений равен $\rho_{\max}(E^d, A_{\Delta}^d + B_u^d F) = 0.9628$, а анизотропийная норма замкнутой системы не превосходит уровень $\|P_{\Delta d}\|_{0.2} < 2.5212$.

Максимальный обобщенный спектральный радиус для замкнутой системы с ограничениями на область расположения конечных собственных значений равен $\rho_{\max}(E^d, A_{\Delta}^d + B_u^d F) = 0.5978$, а анизотропийная норма замкнутой системы не превосходит уровень $\|P_{\Delta d}\|_{0.2} < 28.5739$.

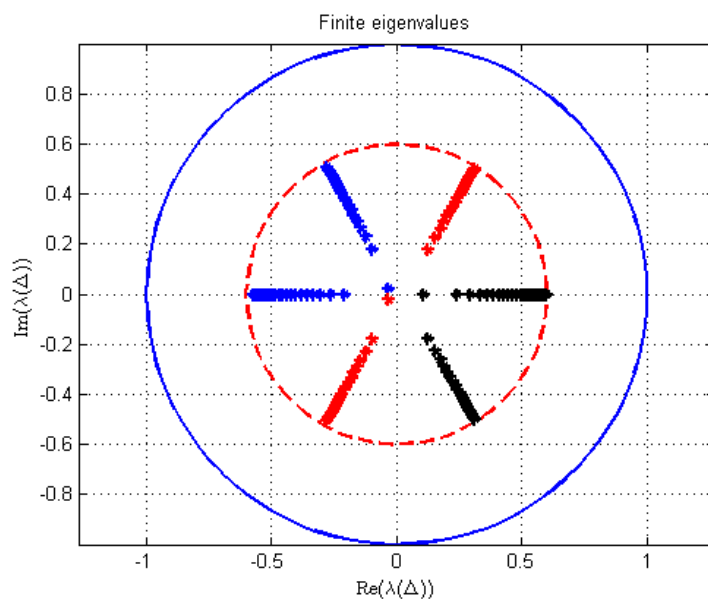


Рис. 4.5. Конечные собственные значения замкнутой системы с ограничением на расположение полюсов.

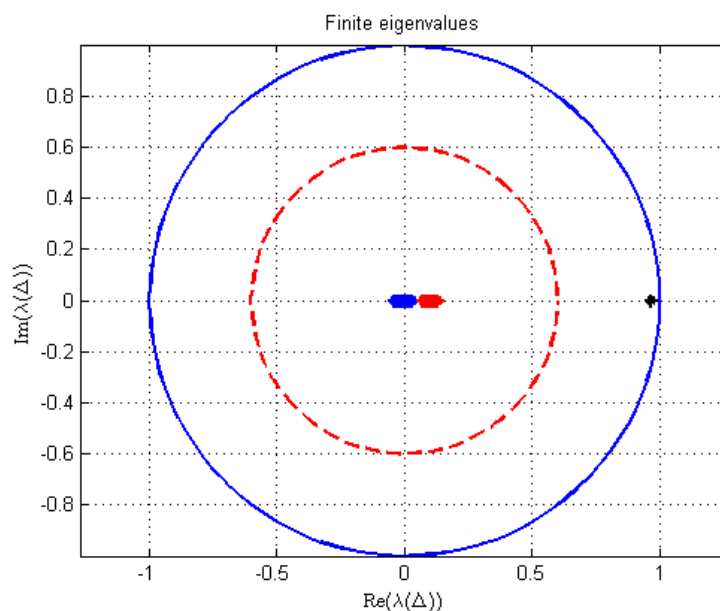


Рис. 4.6. Конечные собственные значения замкнутой системы без ограничений на расположение полюсов.

Численный пример наглядно показывает, что добавление новых ограничений позволяет решать задачу робастного расположения конечных собственных значений замкнутой системы в желаемой области внутри единичного круга в рамках решения оптимизационной задачи анизотропийного робастного управления.

4.5. Частный случай: задача робастного \mathcal{H}_∞ анализа и управления

Рассмотрим частный случай: задачи робастного \mathcal{H}_∞ анализа и управления для дескрипторных систем с неопределенностями. В данном случае рассматривается система вида:

$$Ex(k+1) = A_\Delta x(k) + B_{\Delta w} w(k) + B_{\Delta u} u(k), \quad (4.40)$$

$$y(k) = C_\Delta x(k) + D_{\Delta w} w(k) + D_{\Delta u} u(k). \quad (4.41)$$

Здесь, как и ранее, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^q$ — входное возмущение (суммируемая с квадратом последовательность), $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — выход системы, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ — управление. Матрица E вырожденная, т.е. $\text{rank } E = r < n$. $A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_{\Delta w} = B_w + M_B^w \Delta N_B^w$, $B_{\Delta u} = B_u + M_B^u \Delta N_B^u$, $C_\Delta = C + M_C \Delta N_C$, $D_{\Delta w} = D_w + M_D^w \Delta N_D^w$, $D_{\Delta u} = D_u + M_D^u \Delta N_D^u$. Матрица $\Delta = \Delta(k) \in \mathbb{R}^{s \times s}$ — неизвестная матрица, ограниченная по норме ($\Delta^T \Delta \leq I_s$). Следует заметить также, что неопределенность Δ может быть нестационарной.

Ниже также будут использованы обозначения: $A_d = \bar{W} A \bar{V}$, $B_{wd} = \bar{W} B_w$, $B_{ud} = \bar{W} B_u$, $C_d = C \bar{V}$, $D_{wd} = D_w$, $D_{ud} = D_u$, $M_B^{wd} = \bar{W} M_B^w$, $N_B^{wd} = N_B^w$, $M_A^d = \bar{W} M_A$, $N_A^d = N_A \bar{V}$, $M_C^d = M_C$, $N_C^d = N_C \bar{V}$, $M_B^{ud} = \bar{W} M_B^u$, $N_B^{ud} = N_B^u$.

В отличие от задач анизотропийного анализа и управления, \mathcal{H}_∞ задачи не требуют дополнительных ранговых ограничений типа (4.3)–(4.4) и условия $p \leq q$. Кроме того, матрица $D_{\Delta u}$ может быть ненулевой.

Задача робастного \mathcal{H}_∞ анализа может быть сформулирована в следующем виде.

Задача 4.4. Пусть $u(k) = 0$. Задача заключается в проверке робастной допустимости системы (4.40)–(4.41) для всех ограниченных по норме неопределенностей Δ и выполнение условия ограниченности \mathcal{H}_∞ нормы сверху числом $\gamma > 0$, т.е.

$$\|Y\|_2 \leq \gamma \|W\|_2$$

для всех суммируемых с квадратом входных последовательностей W .

Задача робастного \mathcal{H}_∞ управления имеет вид.

Задача 4.5. Для заданного положительного числа $\gamma > 0$ задача синтеза состоит в поиске регулятора в форме статической обратной связи по состоянию

$$u(k) = Fx(k),$$

для которого замкнутая система (4.40)–(4.41) робастно устойчива, а \mathcal{H}_∞ норма ограничена сверху числом γ , т.е.

$$\sup_{W \in \mathcal{L}_2} \frac{\|Y\|_2}{\|W\|_2} < \gamma$$

для всех $\Delta : \Delta^T \Delta \leq I_s$.

Приведем ниже формулировки теорем, решающих задачи робастного \mathcal{H}_∞ анализа и синтеза без доказательств. Доказательства данных теорем можно найти, например, в [72].

Теорема 4.6. (Частотная теорема) Система (4.40)–(4.41) для $u(k) = 0$ является робастно допустимой, а ее \mathcal{H}_∞ норма ограничена сверху положительным числом γ для всех $\Delta : \Delta \Delta^T \leq I_s$, если найдется такое число $\varepsilon > 0$, и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, при

которых выполняются следующие неравенства:

$$\begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon N_1^T N_1 & M_1 \\ M_1^T & -\varepsilon I_{4s} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.42)$$

Здесь

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & \Sigma_{41}^T & 0 \\ A_d^T \Gamma^T & \Sigma_{22} & \Pi B_{wd} & A_d^T \Gamma^T & C_d^T \\ B_{wd}^T \Gamma^T & B_{wd}^T \Pi^T & -\gamma^2 I_q & B_{wd}^T \Gamma^T & D_{wd}^T \\ \Sigma_{41} & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^T & 0 \\ 0 & C_d & D_{wd} & 0 & -I_p \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11} = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Sigma_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Sigma_{22} = \Pi A_d + A_d^T \Pi^T - \Theta,$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ \Pi M_A^d & \Pi M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma M_A^d & \Gamma M_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C^d & M_D^w \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B^{wd} & 0 & 0 \\ 0 & N_C^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D^w & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Для решения задачи 4.5, подставим закон управления $u(k) = Fx(k)$ в уравнения системы (4.40)–(4.41). Тогда замкнутая система будет вид:

$$Ex(k+1) = (A_\Delta + B_{\Delta u}F)x(k) + B_{\Delta w}w(k), \quad (4.43)$$

$$y(k) = (C_\Delta + D_{\Delta u}F)x(k) + D_{\Delta w}w(k). \quad (4.44)$$

Для системы (4.43)–(4.44) справедлива теорема.

Теорема 4.7. *Для заданного положительного числа $\gamma > 0$ задача 4.5 разрешима, если найдутся такие матрицы $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$,*

$S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и число $\varepsilon > 0$, для которых справедливы следующие матричные неравенства:

$$\begin{bmatrix} \Lambda + \varepsilon M^T M & N \\ N^T & -\varepsilon I_{6s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.45)$$

$$N = \begin{bmatrix} \Gamma (N_A^d)^T & \Omega Z (N_B^{ud})^T & \Gamma (N_C^d)^T & \Omega Z (N_D^u)^T & 0 & 0 \\ \Pi (N_A^d)^T & \Phi Z (N_B^{ud})^T & \Pi (N_C^d)^T & \Phi Z (N_D^u)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma (N_A^d)^T & \Omega Z (N_B^{ud})^T & \Gamma (N_C^d)^T & \Omega Z (N_D^u)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (N_B^{wd})^T & (N_D^w)^T \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & (M_A^d)^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M_B^{ud})^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_C^d)^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_D^u)^T & 0 & 0 \\ 0 & (M_B^{wd})^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M_D^w)^T & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & \Lambda_{41}^T & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^T & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^T \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\gamma^2 I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^T \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & -(Q + Q^T) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Lambda_{21} = A_d \Gamma^T + B_{ud} Z^T \Omega^T, \quad \Lambda_{31} = C_d \Gamma^T + D_{ud} Z^T \Omega^T, \\ \Lambda_{41} &= L - Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Lambda_{22} = \Pi A_d^T + A_d \Pi^T + \Phi Z B_{ud}^T + B_{ud} Z^T \Phi^T - \Theta, \\ \Lambda_{32} &= C_d \Pi^T + D_{ud} Z^T \Phi^T, \quad \Lambda_{52} = B_{ud}^T, \quad \Lambda_{53} = D_{ud}^T. \end{aligned}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Коэффициент усиления можно определить по формуле

$$F = Z^T \begin{bmatrix} Q^{-T} & 0 \\ -S^{-T} R^T Q^{-T} & S^{-T} \end{bmatrix} \bar{V}^{-1}. \quad (4.46)$$

Доказательства теорем 4.6 и 4.7 аналогичны доказательствам теорем 4.1 и 4.3 и поэтому не приводятся.

Замечание 4.1. Условия теоремы 4.7 позволяют сформулировать γ -оптимальную задачу управления в следующей форме

найти: $\min \gamma$ на множестве $\{L, Q, R, S, Z, \varepsilon\}$ при ограничении (4.45).

Теорема 4.7 дает достаточные условия для решения задачи робастного \mathcal{H}_∞ управления, к сожалению, такое решение может быть консервативным. Однако в частной постановке задачи можно получить менее консервативное решение задачи синтеза робастного \mathcal{H}_∞ регулятора. Рассмотрим ее подробнее. Подобная постановка задачи рассматривалась также в работах [163] и [273].

Рассмотрим систему:

$$Ex(k+1) = (A + M_A \Delta N_A)x(k) + B_w w(k) + (B_u + M_B \Delta N_B)u(k), \quad (4.47)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (4.48)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $w(k) \in \mathbb{R}^q$ — входное возмущение, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ — закон управления, $\Delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ — неизвестная ограниченная по норме матрица $\Delta^T \Delta \leq I_s$.

Прямое применение лемм Петерсена и дополнения по Шуру к (2.94) для разомкнутой системы (4.47)–(4.48) позволяет получить следующий результат.

Теорема 4.8. (Частотная теорема) Система (4.47)–(4.48) является робастно допустимой, а ее \mathcal{H}_∞ норма не превосходит заданного положительного

числа γ , т.е. $\|P_\Delta\|_\infty < \gamma$, если существуют такой скаляр $\varepsilon > 0$ и матрицы $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$ для которых при достаточно большом наперед заданном числе $\alpha > 0$ справедливо

$$\begin{bmatrix} \Sigma + \varepsilon N^T N & M \\ M^T & -\varepsilon I_{2s} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.49)$$

Здесь

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & \Sigma_{41}^T & 0 \\ A_d^T \Gamma^T & \Sigma_{22} & \Pi B_{wd} & A_d^T \Gamma^T & C_d^T + \alpha A_d^T \Pi C_d^T \\ B_{wd}^T \Gamma^T & B_{wd}^T \Pi^T & -\gamma^2 I_q & B_{wd}^T \Gamma^T & \alpha B_{wd}^T \Pi C_d^T \\ \Sigma_{41} & \Gamma A_d & \Gamma B_{wd} & -Q - Q^T & 0 \\ 0 & C_d + \alpha C_d \Pi A_d & \alpha C_d \Pi B_{wd} & 0 & -I_p \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{11} = -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Sigma_{41} = L - Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Sigma_{22} = \Pi A_d + A_d^T \Pi^T - \Theta,$$

$$M = \begin{bmatrix} \Gamma M_A^d & 0 \\ \Pi M_A^d & 0 \\ 0 & 0 \\ \Gamma M_A^d & 0 \\ 0 & \alpha C_d \Pi M_A^d \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_A^d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

На основе теоремы 4.8 можно получить следующие условия для синтеза робастного \mathcal{H}_∞ регулятора.

Теорема 4.9. Для заданного положительного числа $\gamma > 0$ и достаточно большого наперед заданного числа $\alpha > 0$ задача синтеза робастного \mathcal{H}_∞ управления для системы (4.47)–(4.48) разрешима, если существуют такие матрицы $L \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $L > 0$, $Q \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и число

$\varepsilon > 0$ для которых справедливо

$$\begin{bmatrix} \Lambda + \varepsilon \widehat{M}^T \widehat{M} & \widehat{N} \\ \widehat{N}^T & -\varepsilon I_{3s} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.50)$$

$$\widehat{N} = \begin{bmatrix} \Gamma (N_A^d)^T & \Omega Z (N_B^{ud})^T & 0 \\ \Pi (N_A^d)^T & \Phi Z (N_B^{ud})^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Gamma (N_A^d)^T & \Omega Z (N_B^{ud})^T & 0 \\ 0 & \alpha B_{wd}^T \Phi^T Z (N_B^{ud})^T & \alpha B_{wd}^T \Pi (N_A^d)^T \end{bmatrix},$$

$$\widehat{M} = \begin{bmatrix} 0 & (M_A^d)^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M_B^{ud})^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (M_A^d)^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & \Lambda_{41}^T & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{32}^T & \Lambda_{21} & \Lambda_{52}^T \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & -\gamma^2 I_p & \Lambda_{31} & \Lambda_{53}^T \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{21}^T & \Lambda_{31}^T & -(Q + Q^T) & 0 \\ 0 & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= -\frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Lambda_{21} = A_d \Gamma^T + B_{ud} Z^T \Omega^T, \quad \Lambda_{31} = C_d \Gamma^T + D_{ud} Z^T \Omega^T, \\ \Lambda_{41} &= L - Q - \frac{1}{2}Q^T, \quad \Lambda_{22} = \Pi A_d^T + A_d \Pi^T + \Phi Z B_{ud}^T + B_{ud} Z^T \Phi^T - \Theta, \\ \Lambda_{32} &= C_d \Pi^T + D_{ud} Z^T \Phi^T, \quad \Lambda_{52} = B_{wd}^T + \alpha B_{wd}^T \Pi A_d^T + \alpha B_{wd}^T \Phi^T Z B_{ud}^T, \quad \Lambda_{53} = \\ &= \alpha B_{wd}^T \Pi C_d^T. \end{aligned}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} I_r & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} Q & R \end{bmatrix}.$$

Коэффициент усиления находится по формуле

$$F = Z^T \begin{bmatrix} Q^{-T} & 0 \\ -S^{-T} R^T Q^{-T} & S^{-T} \end{bmatrix} \bar{V}^{-1}.$$

В отличие от теоремы 4.7 полученные условия обеспечивают менее консервативную оценку на верхнюю границы \mathcal{H}_∞ при синтезе закона управления. Консерватизм можно уменьшить, выбирая число $\alpha > 0$ достаточно большим. Этот факт будет проиллюстрирован в примере 4.4.

Замечание 4.2. *Следует заметить, что полученные выше условия также справедливы для случая, когда $D_w \neq 0$.*

Ниже будут рассмотрены численные примеры, показывающие эффективность предложенных методов синтеза на основе теорем 4.7 и 4.9. Также мы проведем сравнение разработанного метода с другими результатами, полученными в работах [163, 273]. Дополнительно исследуем зависимость оценки верхней границы \mathcal{H}_∞ нормы замкнутой системы для различных значений α .

Пример 4.4. *Пусть параметры системы равны:*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 2 \\ 0.75 & -1 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \ 2 \ 0], \quad D_w = [0.01 \ -0.5].$$

Матрица $A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, здесь $\Delta \in [-1; 1]$ и

$$M_A = [0.1 \ -0.1 \ 0.05]^T, \quad N_A = [0 \ 0.1 \ 0.1].$$

Система является причинной, но она неустойчива. Обобщенный спектральный радиус номинальной системы $\rho(E, A) = 2.5$.

Так как система имеет неопределенности только в матрице A , мы можем применить методы, разработанные в [163, 273] для решения задачи синтеза робастного \mathcal{H}_∞ регулятора. Вспомогательная матрица, необходимая для применения этих методов, выбрана в виде $S = [0 \ e_2 \ 0]^T$. Алгоритм

из [163] сообщает, что задача является неразрешимой. Метод из [273] не может быть применен в пакете *SeDuMi*, т.к. он имеет нелинейные ограничения.

Минимизация числа γ с использованием теоремы 4.7 дает $\gamma_{min}^{(1)} = 1.9095$ с законом управления

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0.1999 & 1.0757 & 1.5013 \end{bmatrix}.$$

Обобщенный спектральный радиус системы лежит в диапазоне

$$0.2339 \leq \rho(E, A_\Delta + B_u F_1) \leq 0.3534.$$

Анализ замкнутой системы с минимизацией γ на основе частотной теоремы из [132] показывает, что \mathcal{H}_∞ норма замкнутой системы не превосходит $\gamma_1^* < 1.8954$.

Минимизация величины γ с использованием теоремы 4.9 при $\alpha = 1000$ дает нам $\gamma_{min}^{(2)} = 1.1459$ с законом управления

$$F_2 = \begin{bmatrix} -0.6661 & 2.0079 & 5.0982 \end{bmatrix}.$$

Обобщенный спектральный радиус системы лежит в диапазоне

$$0.4330 \leq \rho(E, A_\Delta + B_u F_2) \leq 0.4339.$$

Аналогичная оценка верхней границы \mathcal{H}_∞ нормы дает результат $\gamma_2^* < 1.1352$.

В частном случае, если неопределенность присутствует только в матрице A_Δ , теорема 4.9 позволяет получить менее консервативное решение задачи робастного \mathcal{H}_∞ управления с помощью параметра α . Изменение величины \mathcal{H}_∞ нормы замкнутой системы γ_{min} в зависимости от величины α представлено на рис. 4.7. Из графика видно, что увеличение параметра α приводит к монотонному уменьшению порогового значения \mathcal{H}_∞ нормы замкнутой системы до некоторого предельного значения.

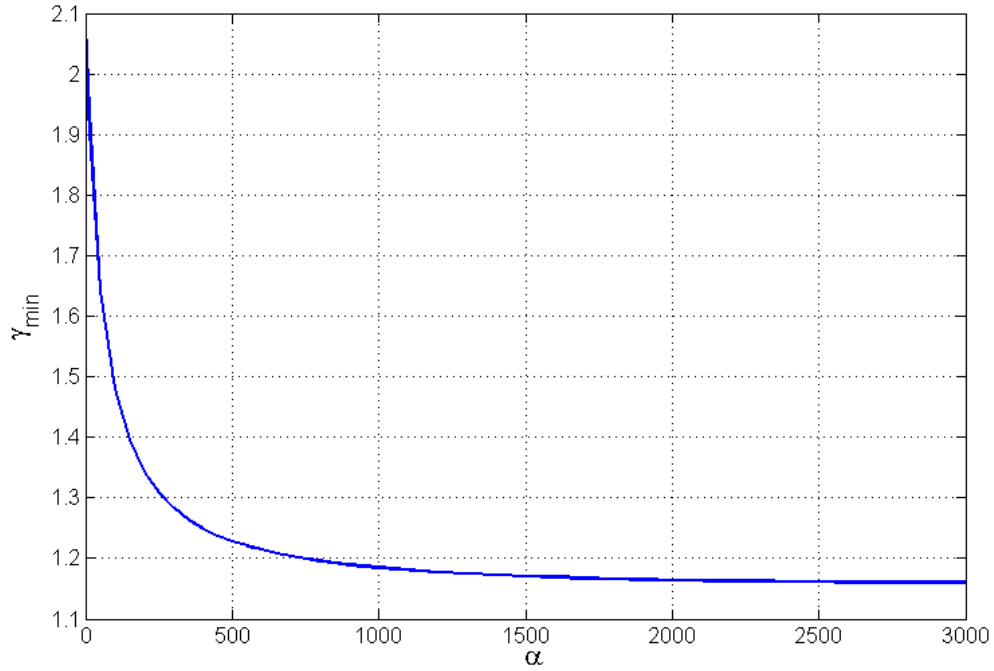


Рис. 4.7. Оценка \mathcal{H}_∞ нормы при различных значениях α .

В следующем примере рассмотрим преимущество теоремы 4.7 перед процедурой синтеза, предложенной в работе [104]. Все параметры рассмотренной ниже системы были взяты из [104].

Пример 4.5. *Параметры системы имеют вид*

$$E = \begin{bmatrix} 8 & 3.2 & 1.6 \\ 4 & 1.6 & 0.8 \\ 12 & 3.2 & 5.6 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.24 & 0.36 \\ 0.3 & 0.12 & 0.3 \\ 0.72 & 0.24 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0.12 & 0.06 \\ 0.12 & 0 \\ 0.06 & 0.12 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \in [-1; 1],$$

где

$M_A = M_B^u = M_B^w = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}^T$, $M_C = M_D^w = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T$, $N_A = N_C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$, $N_B^u = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}^T$, $N_B^w = N_D^w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Матрицы D_u , M_D^u , и N_D^u являются нулевыми.

Заметим также, что система является допустимой для всех значений $\Delta \in [-1; 1]$, а верхняя граница \mathcal{H}_∞ нормы была вычислена на основе [132] и равна $\bar{\gamma} = 1.245$. Цель управления в работе [104] — синтез регулятора, который обеспечивает робастное \mathcal{H}_∞ качество для замкнутой системы, не превосходящее целевое значение $\gamma_{obj} = 0.18$. В работе [104] также упоминается, что метод, предложенный в [163], приводит к неразрешимым ЛМН. Регулятор, найденный в работе [104], имеет параметры

$$F_1 = \begin{bmatrix} -1.5807 & -0.1634 & -0.2967 \\ -0.3101 & -1.0900 & -0.1515 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи синтеза с использованием теоремы 4.7 дает следующий закон управления:

$$F_2 = \begin{bmatrix} -4.2150 & 1.8499 & 0.8112 \\ -2.8755 & -4.8516 & -10.43575 \end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы оценить, насколько хорошо была решена задача синтеза, для каждого регулятора была подсчитана верхняя граница \mathcal{H}_∞ нормы.

Верхняя граница \mathcal{H}_∞ нормы для системы, замкнутой регулятором F_1 , равна $\bar{\gamma}_1 = 0.1975$. Таким образом, методика из [104] не гарантирует ограниченности \mathcal{H}_∞ нормы замкнутой системы. \mathcal{H}_∞ норма системы, замкнутой регулятором F_2 , ограничена сверху числом $\bar{\gamma}_2 = 0.0402$. Таким образом, цель управления была выполнена.

Численные примеры показывают, что предложенная методика анализа и синтеза робастных \mathcal{H}_∞ регуляторов по состоянию для дискретных дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями обладает рядом существенных преимуществ как в плане численной реализации, вычислительной эффективности, так и в плане уменьшения консерватизма полученного решения. Регуляторы, полученные на основе предложенных методов, позволяют существенно повысить качество подавления случайных внешних воз-

мущений и могут быть применены для систем, содержащих неопределенности во всех параметрах в правой части уравнения системы.

Выводы к главе 4

Данная глава посвящена решению задач робастного анализа и синтеза робастного управления для дискретных дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Были рассмотрены две различные задачи подавления влияния внешних возмущений с использованием анизотропийного и \mathcal{H}_∞ критериев качества.

Были получены как невыпуклые условия с необходимостью поиска взаимно-обратных матриц, так и выпуклые, которые легко алгоритмизируются и реализуются в численном виде. В результате численного моделирования была показана эффективность полученных методов синтеза. Для задач робастного анизотропийного анализа и синтеза также рассматривается задача синтеза робастного управления с расположением конечных полюсов замкнутой системы в желаемой области внутри единичного круга. На численных примерах показано, что применение данной методики может дополнительно изменять переходные процессы и гарантировать заданный запас устойчивости в замкнутой системе.

Следует также отдельно отметить задачи робастного \mathcal{H}_∞ анализа и управления. Так как данные задачи решались и ранее, был проведен сравнительный анализ на численных примерах. Сравнительный анализ показал, что разработанная в настоящей главе методика синтеза существенно упрощает вычисления и может быть использована для объектов с полностью неопределенными параметрами в правой части. В отличие от разработанных другими авторами методов, предложенная методика синтеза \mathcal{H}_∞ регулятора практически не имеет ограничений на применение, и в отдельных случаях позволяет получать менее консервативное решение в смысле \mathcal{H}_∞ нормы замкнутой системы.

Глава 5. Анизотропийный анализ и синтез робастных анизотропийных регуляторов для обыкновенных систем с параметрическими неопределенностями

Методы синтеза, разработанные для полностью определенных систем, не могут гарантировать заданный показатель качества или даже устойчивость замкнутой системы в случае, если параметры реального объекта отклонялись от параметров модели. Как следствие, при синтезе систем управления робастность приобрела огромную важность. Это привело к появлению цикла работ, посвященных синтезу робастных регуляторов для систем с параметрическими неопределенностями. Особое внимание в литературе уделялось рассмотрению задач подавления внешних возмущений для систем с политопическими и ограниченными по норме неопределенностями. Целью управления в таких задачах являлось обеспечение робастной устойчивости замкнутой системы и желаемого качества процессов, протекающих в системе, с учетом действующих на нее внешних возмущений.

Разработка и развитие теории робастного анизотропийного управления для параметрически неопределенных систем является важной и значимой проблемой. Целью данной главы является разработка методов анализа анизотропийного качества параметрически неопределенных линейных обыкновенных систем, а также построение для них робастных анизотропийных законов управления. В качестве рассматриваемых параметрических неопределенностей выступают

политопические неопределенности и ограниченные по норме неопределенности. Приведенные методы анализа и синтеза робастного анизотропийного управления сформулированы в терминах матричных неравенств и легко алгоритмируются в помощь пакетов выпуклой оптимизации.

5.1. Анизотропийный анализ и синтез анизотропийного управления для политопических систем

Одним из важных математических описаний параметрических неопределенностей в линейной стационарной системе является политопическая неопределенность. Это такая неопределенность, при которой множество всех возможных параметров системы находится внутри выпуклого многогранника, а номинальная система принадлежит центру этого многогранника. Задачи исследования робастной устойчивости, а также синтеза робастных стабилизирующих и \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ регуляторов достаточно широко исследуются мировыми учеными в настоящее время. Например, одно из решений задачи \mathcal{H}_2 анализа для политопических систем было получено в работе [211]. Для решения задач \mathcal{H}_∞ анализа сформулированы различные версии частотной теоремы [205]. Все результаты сформулированы с использованием линейных матричных неравенств. На основе полученных методик анализа были также решены задачи синтеза робастных законов управления для политопических систем. Статические законы управления были получены в работах [105, 212], а законы управления в виде динамической обратной связи при неполном измерении вектора состояния строятся в работах [105, 212, 252, 276, 184, 228].

Исходя из вышесказанного, рассмотрение политопических систем с точки зрения анизотропийного подхода является весьма перспективным направлением исследования. Ниже будут приведены результаты решения задач анизотропийного анализа и синтеза анизотропийного регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для полностью неопределенных политопических

систем.

5.1.1. Общая постановка задачи анализа и управления

Рассмотрим линейную систему с реализацией в пространстве состояний в виде:

$$x(k+1) = A(\Theta)x(k) + B_u(\Theta)u(k) + B_w(\Theta)w(k), \quad (5.1)$$

$$z(k) = C(\Theta)x(k) + D_u(\Theta)u(k) + D_w(\Theta)w(k), \quad (5.2)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее случайное возмущение с нулевым средним и с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$ ($a \geq 0$), $u(k) \in \mathbb{R}^q$ — вектор управления, $z(k) \in \mathbb{R}^p$ — управляемый выход системы.

Матрицы $A(\Theta)$, $B_w(\Theta)$, $B_u(\Theta)$, $C(\Theta)$, $D_w(\Theta)$ определяются из выражений

$$\begin{aligned} A(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i A_i, & B_w(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i B_{wi}, \\ B_u(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i B_{ui}, & D_u(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i D_{ui}, \\ C(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i C_i, & D_w(\Theta) &= \sum_{i=1}^r \theta_i D_{wi}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где вектор неопределенных параметров Θ обладает следующими свойствами

$$\sum_{i=1}^r \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0, \quad \theta_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = \overline{1, r}. \quad (5.4)$$

Обозначим множество всех параметров Θ , удовлетворяющих (5.3) и (5.4), через \mathfrak{Q} и рассмотрим отображение $Z = F_\Theta W$, определяемое выражениями (5.1)–(5.2).

Определение 5.1. *Анизотропийной нормой политопической системы (5.1)–(5.4) будем называть норму оператора F_Θ , определяемую выражением*

$$\|F_{\Theta}\|_a = \sup_{\Theta \in \Omega} \sup_{W: A(W) \leq a} \frac{\|Z\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}. \quad (5.5)$$

В задаче робастного анизотропийного анализа политопических систем необходимо получить условия для проверки робастной устойчивости и ограниченности анизотропийной нормы разомкнутой системы (5.1)–(5.2) для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и заданного числа $\gamma > 0$. Т.е. задачу анализа можно сформулировать следующим образом.

Задача 5.1. Для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ входного случайного возмущения $w(k)$ и заданного числа $\gamma > 0$ при условии, что $u(k) = 0$ проверить:

1. является ли система робастно устойчивой;
2. выполняется ли условие

$$\|F_{\Theta}\|_a < \gamma.$$

Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора по состоянию для политопической системы может быть сформулирована следующим образом.

Задача 5.2. Для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и заданного числа $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде $u(k) = Kx(k)$, который робастно стабилизирует разомкнутую систему (5.1)–(5.2) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы, т.е.

$$\|F_{\Theta}^{cl}\|_a < \gamma.$$

Далее будут приведены параметрические и непараметрические решения поставленных выше задач.

5.1.2. Анизотропийный анализ политопических систем

Для решения задачи анизотропийного анализа политопических систем, получим сначала параметрические условия. Они сформулированы в следующей теореме.

Теорема 5.1. Система (5.1)–(5.2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма не превышает заданного числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$, если существуют такие матрицы $P(\Theta) > 0$, $\Psi(\Theta) > 0$, невырожденные матрицы $G_1(\Theta)$, $G_2(\Theta)$ и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы матричные неравенства:

$$\eta - (e^{-2a} \det \Psi(\Theta))^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & \star & \star \\ G_1(\Theta)B_w(\Theta) & L_1(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_2(\Theta)A(\Theta) & G_2(\Theta)B_w(\Theta) & L_2(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0 \quad (5.8)$$

где $L_1(\Theta) = -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta)$ и $L_2(\Theta) = -G_2(\Theta) - G_2^T(\Theta) + P(\Theta)$, для любого значения $\Theta \in \Omega$.

Доказательство. Доказательство теоремы состоит из двух частей. В первой части доказательства будут получены условия, при которых политопическая система (5.1)–(5.2) является робастно устойчивой, а ее \mathcal{H}_∞ норма ограничена некоторым числом $\sqrt{\eta}$, т.е. $F_\Theta \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$. Во второй части доказательства получим условия ограниченности анизотропийной нормы для робастно устойчивой системы $F_\Theta \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$.

Рассмотрим параметрическую функцию в качестве кандидата на роль функции Ляпунова в виде:

$$V(k) = x^T(k)P(\Theta)x(k), \quad P(\Theta) > 0. \quad (5.9)$$

Без снижения общности предположим также, что $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{L}_2$. Разница между приращениями $V(k+1)$ и $V(k)$ определяется по формуле

$$V(k+1) - V(k) = x^T(k+1)P(\Theta)x(k+1) - x^T(k)P(\Theta)x(k). \quad (5.10)$$

Рассмотрим теперь выражение:

$$\begin{aligned} V(k+1) - V(k) + z^T(k)z(k) - \eta w^T(k)w(k) &= \\ &= \{ \text{подставим } x(k+1) = A(\Theta)x(k) + B_w(\Theta)w(k) \\ &\quad \text{и } z(k) = C(\Theta)x(k) + D_w(\Theta)w(k) \} = \\ &= \begin{bmatrix} x^T(k) & w^T(k) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \end{bmatrix}^T P(\Theta) \times \right. \\ &\quad \times \begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix} - \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} P(\Theta) & 0 \\ 0 & \eta I_m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство

$$V(k+1) - V(k) + z^T(k)z(k) - \eta w^T(k)w(k) < 0 \quad (5.12)$$

справедливо для всех $x(k)$ и $w(k)$, если

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \end{bmatrix}^T P(\Theta) \begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P(\Theta) & 0 \\ 0 & \eta I_m \end{bmatrix} < 0. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Преобразуем неравенство (5.13) к виду:

$$\begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -\eta I_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix}^T \times \\ \times \begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\Theta) & B_w(\Theta) \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0, \quad (5.14)$$

где матрица $\begin{bmatrix} -P^{-1}(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix}$ является отрицательно определенной. Применяя к неравенству (5.14) лемму о дополнении по Шуру, имеем

$$\begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A(\Theta) & B_w(\Theta) & -P^{-1}(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (5.15)$$

Выполнение неравенства (5.14) для ненулевого входного сигнала делает справедливым неравенства вида (5.12) для любого $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ и позволяет выполнить их суммирование от $k = 0$ до $k = \infty$. Откуда следует выполнение неравенства

$$V(\infty) - V(0) + \sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k) - \eta \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) < 0. \quad (5.16)$$

Для нулевых начальных условий с учетом $V(\infty) > 0$, из неравенства (5.16) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k) < \eta \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k).$$

Таким образом,

$$\sup_{\Theta \in \Omega} \sup_{W \in \mathcal{L}_2} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} z^T(k)z(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)} < \eta. \quad (5.17)$$

Выполнение неравенства (5.15) гарантирует устойчивость разомкнутой системы (5.1)–(5.2) и ограниченность ее \mathcal{H}_∞ нормы сверху числом $\sqrt{\eta}$.

На втором этапе необходимо найти условия, которые гарантируют ограниченность анизотропийной нормы для уровня средней анизотропии входных возмущений $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$. Тогда условия ограниченности анизотропийной нормы могут быть определены анизотропийной частотной теоремы [258] в следующей форме

$$-(\det(\Sigma(\Theta)))^{1/m} < -(1 - q\gamma^2)e^{2a/m}, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A(\Theta)R(\Theta)A(\Theta) & A^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) \\ B_w^T(\Theta)R(\Theta)A(\Theta) & B_w^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) - I_m \end{bmatrix} + \\ & + q \begin{bmatrix} C^T(\Theta) \\ D_w^T(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(\Theta) & D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $q \in [0, \min(\gamma^{-2}, \|F_\Theta\|_\infty^{-2})]$, а $\Sigma(\Theta)$ определяется из выражения

$$\Sigma(\Theta) = (I_m - B_w^T(\Theta)R(\Theta)B_w(\Theta) - qD_w^T(\Theta)D_w(\Theta))^{-1}. \quad (5.20)$$

Неравенство (5.19) совпадает с неравенством (5.13) с учетом замены переменных $P(\Theta) = \eta R(\Theta)$ и $\eta = q^{-1}$. Таким образом, анизотропийная норма системы ограничена, если выполняются неравенства (5.15) и (5.19).

Рассмотрим подробнее неравенство (5.19). С учетом введенных обозначений оно может быть переписано в виде:

$$\eta - (e^{-2a} \det(\eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta)))^{1/m} < \gamma^2. \quad (5.21)$$

Вводя новую переменную

$$\Psi(\Theta) < \eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta),$$

где $\Psi(\Theta) = \Psi(\Theta)^T > 0$ [31], неравенство (5.21) выполнено, если справедливы два следующих неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi(\Theta)))^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.22)$$

$$\Psi(\Theta) < \eta I_m - B_w^T(\Theta)P(\Theta)B_w(\Theta) - D_w^T(\Theta)D_w(\Theta). \quad (5.23)$$

Перепишем (5.23) как

$$\Psi(\Theta) - \eta I_m - \begin{bmatrix} B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(\Theta) & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w(\Theta) \\ D_w(\Theta) \end{bmatrix} < 0. \quad (5.24)$$

Применяя лемму о дополнении Шура к (5.24), получаем

$$\begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \\ B_w(\Theta) & -P^{-1}(\Theta) & 0 \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (5.25)$$

Умножим неравенство (5.26) слева и справа на матрицу $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & G_1(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ и ее транспонированную. С учетом (5.29) получим

$$\begin{bmatrix} \Psi(\Theta) - \eta I_m & \star & \star \\ G_1(\Theta)B_w(\Theta) & \Lambda_1(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.26)$$

где $\Lambda_1(\Theta) = -G_1(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_1^T(\Theta)$.

Отметим, что для $P(\Theta) > 0$ из неравенства

$$-(G_1(\Theta) - P(\Theta))^T P^{-1}(\Theta)(G_1(\Theta) - P(\Theta)) \leq 0$$

следует, что $-G_1(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_1^T(\Theta) \leq -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta)$. Вводя обозначение $L_1(\Theta) = -G_1(\Theta) - G_1^T(\Theta) + P(\Theta)$ и заменяя $\Lambda_1(\Theta)$ на $L_1(\Theta)$ в неравенстве (5.26), получаем неравенство (5.7).

Избавимся от обращения матрицы $P(\Theta)$ в неравенстве (5.15). Для этого введем новую невырожденную матрицу $G_2(\Theta)$. Умножая слева и справа неравенство (5.15) на невырожденную матрицу

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2(\Theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

и ее транспонированную соответственно, получим:

$$\begin{bmatrix} -P(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_2(\Theta)A(\Theta) & G_2(\Theta)B_w(\Theta) & \Lambda_2(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.28)$$

где

$$\Lambda_2(\Theta) = -G_2(\Theta)P^{-1}(\Theta)G_2^T(\Theta). \quad (5.29)$$

Аналогично предыдущему случаю, заменяем $\Lambda_2(\Theta)$ на выражение $L_2(\Theta) = -G_2(\Theta) - G_2^T(\Theta) + P(\Theta)$. В результате чего получим выражение (5.8).

Теорема доказана. ■

Условия теоремы 5.1 сформулированы в компактном виде и зависят явно от параметра Θ . В настоящее время не существует какого-либо формального метода для определения точного вида матрицы $P(\Theta)$ как функции от вектора параметров Θ . Такая функция $P(\Theta)$ в научной литературе носит название параметрической матрицы Ляпунова [115, 136, 204]. К сожалению, такая параметрическая зависимость может существенным образом усложнить методику анализа исходной системы и делает невозможным решение задачи синтеза. Уменьшить вычислительную сложность алгоритма можно, вводя дополнительные ограничения, например, используя различные аппроксимации для матриц $\Psi(\Theta)$, $P(\Theta)$, $G_1(\Theta)$ и $G_2(\Theta)$. Такой подход, с одной стороны, позволяет избавиться от явного вхождения вектора параметров Θ в матричные неравенства, но с другой стороны, вносит некоторый консерватизм. Воспользуемся линейной аппроксимацией для параметрической матрицы Ляпунова и некоторых вспомогательных переменных. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. Система (5.1)–(5.2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих

(5.3)–(5.4), если существуют такие матрицы $P_i > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_{1i} , G_{2i} и число $\eta > \gamma^2$, при которых справедливы следующие матричные неравенства:

$$\eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i} B_{wi} & -G_{1i} - G_{1i}^T - P_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.31)$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i} A_i & G_{2i} B_{wi} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.32)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i} B_{wj} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1j} B_{wi} & -G_{1j} - G_{1j}^T + P_j & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.33)$$

$$\begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i} A_j & G_{2i} B_{wj} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_j & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2j} A_i & G_{2j} B_{wi} & -G_{2j} - G_{2j}^T + P_j & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.34)$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Доказательство. Зададим матрицы $\Psi(\Theta)$, $G_1(\Theta)$, $G_2(\Theta)$ и $P(\Theta)$ в форме $\Psi(\Theta) = \Psi$, $G_1(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i G_{1i}$, $G_2(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i G_{2i}$, $P(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i P_i$. Перепишем неравенства (5.7) и (5.8) с учетом введенных допущений. Получим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \\
& + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1i} B_{wj} & -G_{1i} - G_{1i}^T + P_i & \star \\ D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ G_{1j} B_{wi} & -G_{1j} - G_{1j}^T + P_j & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} \right) < 0, \quad (5.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i} A_i & G_{2i} B_{wi} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_m \end{bmatrix} + \\
& + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} -P_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2i} A_j & G_{2i} B_{wj} & -G_{2i} - G_{2i}^T + P_i & \star \\ C_j & D_{wj} & 0 & -I_m \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} -P_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ G_{2j} A_i & G_{2j} B_{wi} & -G_{2j} - G_{2j}^T + P_j & \star \\ C_i & D_{wi} & 0 & -I_m \end{bmatrix} \right) < 0. \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Заметим также, что $(\sum_{i=1}^r \theta_i)^2 = 1$. Так как $\theta_i \geq 0$, $i = \overline{1, r}$, то очевидно, что неравенства (5.6)–(5.8) выполняются, когда выполняются неравенства (5.30)–(5.34). ■

Полученные в теореме 5.2 условия свободны от вектора параметров Θ и позволяют оценить анизотропийную норму политопической системы, проверив выполнение $2r + r(r-1) + 1$ неравенства. Число неравенств, а также переменных можно снизить, повысив консерватизм оценки с учетом того факта, что $\Phi(\Theta) = P^{-1}(\Theta)$. Сформулируем теорему.

Теорема 5.3. Система (5.1)–(5.2) является робастно устойчивой, а ее анизотропийная норма строго меньше числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ и всех возможных неопределенностей, удовлетворяющих (5.3)–(5.4), если существуют такие матрицы $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, невырожденные матрицы G_i и число $\eta > \gamma^2$, при которых справедливы следующие матричные неравенства:

$$\eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.37)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.39)$$

$$\begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & \star \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_j - G_j^T + \Phi_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & \star \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.40)$$

где $i, j = \overline{1, r}$, $i < j$.

Доказательство. Рассмотрим неравенства (5.15) и (5.26), полученные при доказательстве предыдущей теоремы. Введем переменную $\Phi(\Theta) = P^{-1}(\Theta)$, а

также зафиксируем параметр η и матрицу Ψ . Тогда неравенства (5.15) и (5.26) перепишутся в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B_w^T(\Theta) & D_w^T(\Theta) \\ B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & 0 \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0 \quad (5.41)$$

и

$$\begin{bmatrix} -\Phi^{-1}(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\gamma^2 I_m & \star & \star \\ A(\Theta) & B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & \star \\ C(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (5.42)$$

Последнее неравенство содержит матрицу $\Phi^{-1}(\Theta)$. Чтобы избавиться от нее, умножим неравенство (5.42) слева и справа на матрицу

$$\begin{bmatrix} G^T(\Theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}$$

и ее транспонированную, соответственно. В результате получаем:

$$\begin{bmatrix} \Lambda(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A(\Theta)G(\Theta) & B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & \star \\ C(\Theta)G(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (5.43)$$

где $\Lambda(\Theta) = -G^T(\Theta)\Phi^{-1}(\Theta)G(\Theta)$.

Заметим, что $\Phi(\Theta) > 0$, поэтому из выполнения неравенства

$$-(G(\Theta) - \Phi(\Theta))^T \Phi^{-1}(\Theta)(G(\Theta) - \Phi(\Theta)) \leq 0$$

следует, что $-G^T(\Theta)\Phi^{-1}(\Theta)G(\Theta) \leq -G(\Theta) - G^T(\Theta) + \Phi(\Theta)$. Из последнего следует, что неравенство (5.43) справедливо, если справедливо неравенство (5.42).

Принимая во внимание выражения для параметрических неопределенностей (5.3)–(5.4), рассмотрим матрицу $\Phi(\Theta)$ в форме $\Phi(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i \Phi_i$. Тогда неравенства (5.41) и (5.43) запишутся в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^r \theta_i \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \theta_i^2 \begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_i & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i G_i & D_{wi} & 0 & -I_m \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \theta_i \theta_j \left(\begin{bmatrix} -G_i - G_i^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_j G_i & B_{wj} & -\Phi_i & \star \\ C_j G_i & D_{wj} & 0 & -I_m \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} -G_j - G_j^T + \Phi_j & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i G_j & B_{wi} & -\Phi_j & \star \\ C_i G_j & D_{wi} & 0 & -I_m \end{bmatrix} \right) < 0. \quad (5.45) \end{aligned}$$

Следует заметить, что неравенство (5.45) можно получить, используя свойство (5.4) и учитывая, что $(\sum_{i=1}^r \theta_i)^2 = 1$. Очевидно, что из выполнения неравенств (5.38)–(5.40) автоматически следует выполнение неравенств (5.44) и (5.45). Что завершает доказательство. ■

Полученные в теореме 5.3 условия позволяют оценить анизотропийную норму политопической системы, проверив выполнение $2r + \frac{r(r-1)}{2} + 1$ неравенства.

К сожалению, оценить степень консерватизма полученных в теоремах 5.2 и 5.3 аналитическими методами невозможно. Оценить степень консерватизма условий можно только для конкретных примеров численными методами. Эти

методы можно разработать на основе теоремы 5.1. Рассмотрим сеточный метод анализа политопических систем с использованием теоремы 5.1. Алгоритм может быть представлен в следующем виде.

Алгоритм 5.1.

Шаг 1. Задаем уровень средней анизотропии $a \geq 0$ и шаг сетки h . Задаем множество Ω , лежащее внутри единичного куба из \mathbb{R}^{r-1} и состоящее из множества точек — узлов сетки. Фиксируем параметр Θ , назначая первые $(r - 1)$ компонент — координатами точки из множества Ω , а последнюю вычисляем по формуле $\theta_r = 1 - \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i = 1$.

Шаг 2. Задаем $k = 1$.

Шаг 3. Пока $k \leq N$, выбираем элемент множества Ω_k , фиксируем матрицы системы $A_k = \sum_{i=1}^r \theta_i A_i$, $B_k = \sum_{i=1}^r \theta_i B_{wi}$, $C_k = \sum_{i=1}^r \theta_i C_{zi}$, $D_k = \sum_{i=1}^r \theta_i D_{zwi}$.

Шаг 4. Для фиксированных значений A_k, B_k, C_k, D_k решается оптимизационная задача:

$$\gamma_k^2 = \min \gamma^2$$

на множестве переменных $\{\eta, \gamma^2, P, \Psi, G_1, G_2\}$, удовлетворяющих неравенствам (1.52)–(1.54).

Шаг 5. Если система матричных неравенств неразрешима на шаге 4, то система является неустойчивой при данных значениях параметров, а алгоритм останавливается. Если решение найдено, то вычисляется значение $\gamma_* = \max\{\gamma_k, \gamma_{k-1}\}$, Если $k < N$, то $k = k + 1$, возвращаемся на Шаг 4. Если $k = N$, то переходим на Шаг 6.

Шаг 6. Верхняя граница анизотропийной нормы определяется как γ_* .

К одному из недостатков такого метода следует отнести то, что достаточно крупный шаг сетки не позволит с удовлетворительной точностью оценить верх-

ную границу анизотропийной нормы. Поэтому, рекомендуется сначала проверить систему на робастную устойчивость с помощью теорем 5.2 или 5.3.

Рассмотрим вычислительный пример, показывающий, как работает предложенный алгоритм.

Пример 5.1. Пусть система задается в виде:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.7 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{w1} = D_{w2} = 0.$$

Выполним проверку, является ли данная система робастно устойчивой. Для этого рассмотрим множество параметров θ_1 и θ_2 . Параметр θ_2 можно явно выразить через θ_1 по формуле $\theta_2 = 1 - \theta_1$. Тогда матрица $A(\Theta)$ будет иметь вид:

$$A(\Theta) = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 - 0.1\theta_1 & 1 - 1.7\theta_1 \\ \theta_1 - 0.5 & 0.4\theta_1 - 0.7 \end{bmatrix}.$$

Параметрический спектр матрицы $A(\Theta)$ можно вычислить в явном виде. Получаем:

$$\lambda_1(\Theta) = 0.15\theta_1 + 0.15 - 0.5\sqrt{0.89 + 5.7\theta_1 - 6.55\theta_1^2},$$

$$\lambda_2(\Theta) = 0.15\theta_1 + 0.15 + 0.5\sqrt{0.89 + 5.7\theta_1 - 6.55\theta_1^2}.$$

В диапазоне $0 \leq \theta_1 \leq 1$ оба собственных значения являются действительными. Графики зависимостей величины собственных чисел матрицы $A(\Theta)$ приведены на рис. 5.1. Как видно из графиков, собственные значения лежат внутри единичного круга для всех значений вектора параметров Θ из диапазона (5.4). Таким образом, можно использовать алгоритм 5.1 для оценки анизотропийной нормы заданной системы.

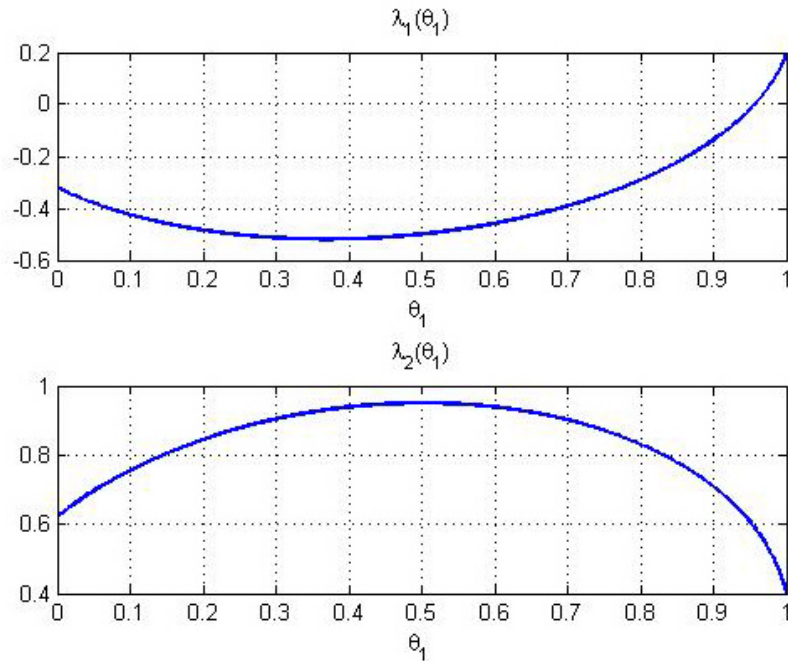


Рис. 5.1. Спектр матрицы $A(\Theta)$ из примера 5.1.

Согласно алгоритму 5.1., множество Ω можно задать в следующем виде $\theta_2 = 1 - \theta_1$, $0 \leq \theta_1 \leq 1$. Выберем шаг сетки как $h = 0.01$, а уровни средней анизотропии зададим через $a_1 = 0$, $a_2 = 0.5$, $a_3 = 100$. Случай $a_1 = 0$ соответствует задаче оценки верхней границы \mathcal{H}_2 нормы, случай $a_3 = 100$ близок к задаче оценки верхней границы \mathcal{H}_∞ нормы. Результат вычисления анизотропийной нормы в узлах сетки для различных значений Θ для случая $a_2 = 0.5$ проиллюстрирован на Рис. 5.2. Легко видеть, что наибольшее значение нормы достигается в точке $\theta_1 = 0.62$, $\theta_2 = 0.38$. Таким образом, верхняя граница анизотропийной нормы для случая $a_2 = 0.5$ равна $\|F\|_a \approx 7.0013$.

Аналогично, применяя алгоритм 5.1. для случаев $a_1 = 0$ и $a_3 = 100$, имеем соответственно $\|F\|_0 = \|F\|_2 \approx 2.2619$, $\|F\|_{100} \approx 8.6421 \approx \|F\|_\infty$. График значений анизотропийной нормы в узлах сетки для случаев $a_1 = 0$ и $a_3 = 100$ показаны на Рис. 5.3.

В примере 5.1 были продемонстрированы возможности алгоритма 5.1 для оценки анизотропийной нормы политопической системы. В следующем примере оценим степень консерватизма методов оценки анизотропийной нормы политопической системы.

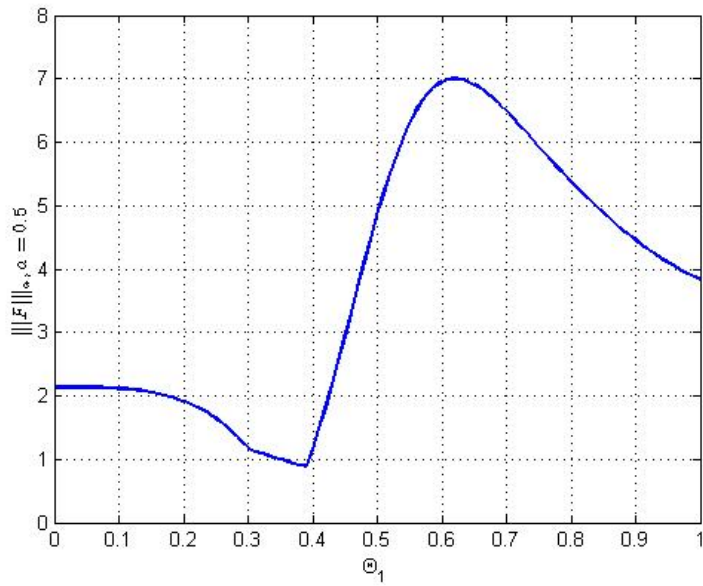


Рис. 5.2. Величина анизотропийной нормы в узлах сетки при различных значениях Θ при $a_2 = 0.5$.

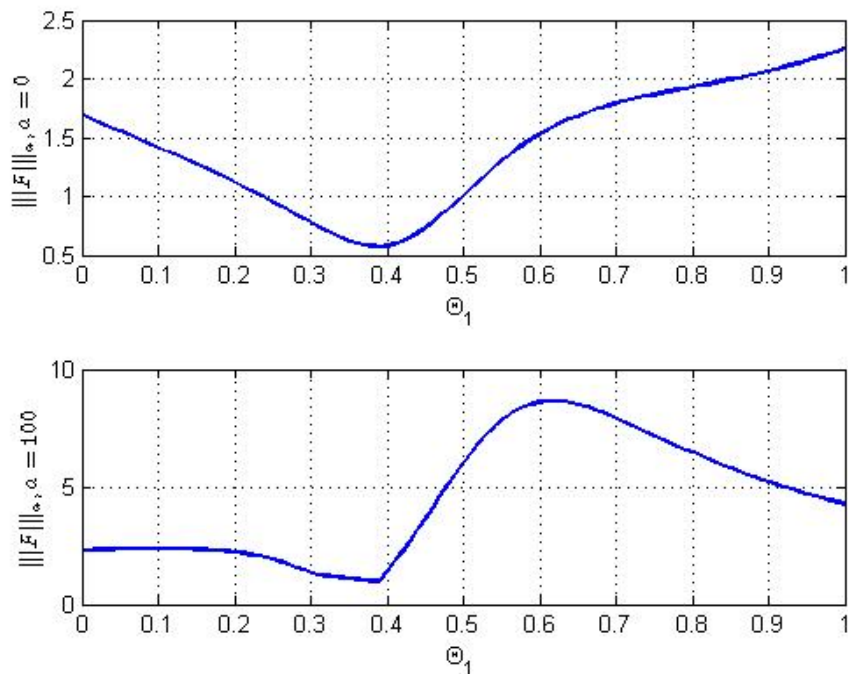


Рис. 5.3. Величина анизотропийной нормы в узлах сетки при различных значениях Θ при $a_1 = 0$ (верхний рисунок) и $a_3 = 100$ (нижний рисунок).

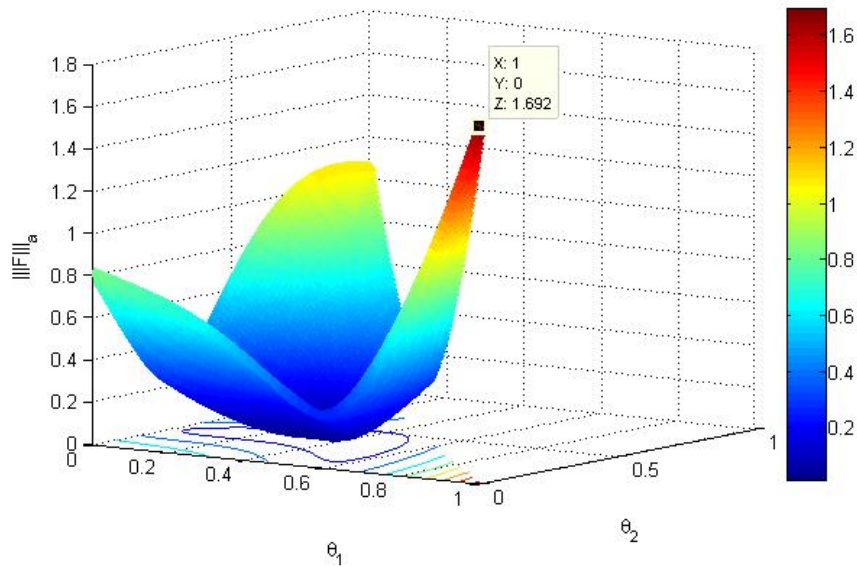


Рис. 5.4. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 0$.

пической системы, сформулированных в теоремах 5.2 и 5.3.

Пример 5.2. Пусть система задается следующими матрицами:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.7 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.7 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_{w3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad D_{w1} = 0, D_{w2} = 0.1, D_{w3} = -0.1.$$

Для оценки степени консерватизма методов, предложенных в теоремах 5.2 и 5.3 воспользуемся сеточным методом анализа системы с шагом сетки $h = 0.01$. На рис. 5.4–5.6 представлены результаты минимизации γ в различных узлах сетки.

Как видно из графиков, двойной супремум (5.5) для различных уровней средней анизотропии a достигается в различных точках Θ . Результаты численных экспериментов по вычислению анизотропийной нормы приведены в таблице 5.1.

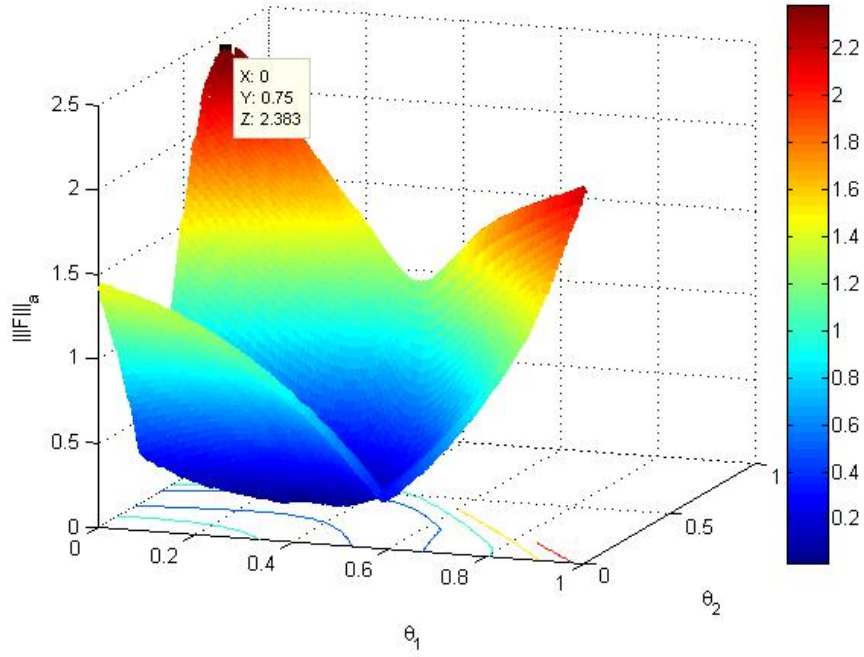


Рис. 5.5. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 0.5$.

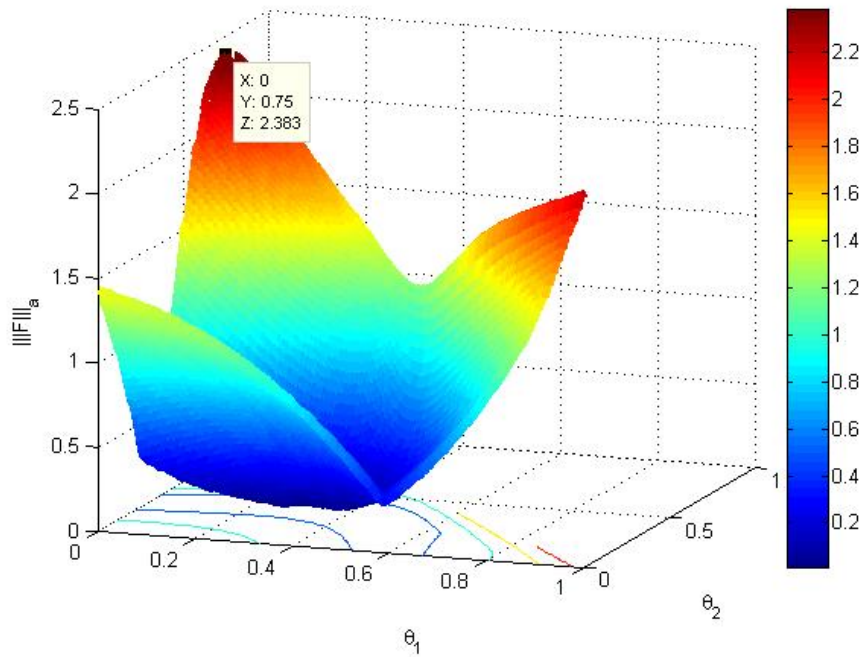


Рис. 5.6. Зависимость минимального значения γ от параметров Θ при $a = 1.5$.

Таблица 5.1. Результаты вычисления анизотропийной нормы

Средняя анизотропия a	0	0.1	0.5	1	1.5	100
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 5.1	1.6921	1.9258	2.3825	2.6616	2.7564	2.8100
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 5.2	4.6495	6.2913	7.9585	8.6163	8.8423	8.9707
$\ F_{\Theta}\ _a$ на основе теоремы 5.3	6.7304	8.1552	9.0582	9.3701	9.4742	9.5327

Как видно из таблицы 5.1, условия теоремы 5.3 дают более консервативные результаты. Несмотря на это, асимптотика анизотропийной нормы для приведенных численно реализуемых методов сохраняется. Таким образом, данные методы можно использовать для оценки анизотропийного качества политопических систем.

5.1.3. Синтез робастного анизотропийного управления по состоянию для политопических систем

Неравенства (5.22), (5.26) и (5.43) определяют параметрические условия для проверки ограниченности анизотропийной нормы разомкнутой политопической системы (5.1)–(5.2). На основе данных неравенств можно получить условия для синтеза робастного закона управления.

Теорема 5.4. Система (5.1)–(5.2) робастно стабилизируема законом управления в виде статической обратной связи по состоянию $u(k) = K(\Theta)x(k)$, а ее анизотропийная норма строго ограничена числом $\gamma > 0$ для известного уровня средней $a \geq 0$ входного возмущения для всех возможных неопределенностей, определяемых выражениями (5.3)–(5.4) если существуют такие матрицы $\Phi(\Theta) > 0$, $\Psi > 0$, $L(\Theta)$, $G(\Theta)$ и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливо неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.46)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & \star \\ D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} -G(\Theta) - G^T(\Theta) + \Phi(\Theta) & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A(\Theta)G(\Theta) + B_u(\Theta)L(\Theta) & B_w(\Theta) & -\Phi(\Theta) & \star \\ C(\Theta)G(\Theta) + D_u(\Theta)L(\Theta) & D_w(\Theta) & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (5.48)$$

При этом параметры регулятора определяются выражением

$$K(\Theta) = L(\Theta)G(\Theta)^{-1}.$$

Доказательство. Замкнутая система задается выражениями

$$x(k+1) = (A(\Theta) + B_u(\Theta)K(\Theta))x(k) + B_w(\Theta)w(k), \quad (5.49)$$

$$z(k) = (C(\Theta) + D_u(\Theta)K(\Theta))x(k) + D_w(\Theta)w(k). \quad (5.50)$$

Используя обозначение $K(\Theta) = L(\Theta)G^{-1}(\Theta)$ неравенства (5.46)–(5.48) получаются напрямую из (5.22), (5.26) и (5.43) соответственно после подстановки в них параметров замкнутой системы. ■

Условия теоремы 5.5 также являются параметрическими. Эти условия неприменимы при реализации численных процедур синтеза робастного управления. Однако на их основе можно получить непараметрические условия для синтеза робастного анизотропийного управления. Рассмотрим следующую теорему.

Теорема 5.5. Система (5.1)–(5.2) робастно стабилизируема законом управления в виде статической обратной связи по состоянию $u(k) = Kx(k)$, а ее анизотропийная норма строго ограничена числом $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ входного возмущения для всех возможных неопределенностей, определяемых выражениями (5.3)–(5.4) если существуют

такие матрицы $\Phi_i > 0$, $\Psi > 0$, \bar{L} , \bar{G} и число $\eta > \gamma^2$, для которых справедливы неравенства

$$\eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.51)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.52)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{G} - \bar{G}^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i \bar{G} + B_{ui} \bar{L} & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i \bar{G} + D_{ui} \bar{L} & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.53)$$

$i = \overline{1, r}$. При этом параметры регулятора определяются выражением

$$K = \bar{L} \cdot \bar{G}^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $G(\Theta) = \bar{G}$, $L(\Theta) = \bar{L}$, $\Phi(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i \Phi_i$. С учетом выражений (5.3)–(5.4) и введенных предположений, неравенства (5.47) и (5.48) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^r \theta_i \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0 \quad (5.54)$$

и

$$\sum_{i=1}^r \theta_i \begin{bmatrix} -\bar{G} - \bar{G}^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i \bar{G} + B_{ui} \bar{L} & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i \bar{G} + D_{ui} \bar{L} & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0 \quad (5.55)$$

соответственно. Откуда условия существования робастного регулятора (5.57)–(5.59) следуют напрямую. ■

Полученные условия могут быть использованы для синтеза робастного анизотропийного регулятора с расположением полюсов замкнутой системы в заданной области внутри единичного круга. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 5.1. [199] *Разомкнутая система (5.1) робастно устойчива, а ее полюса находятся внутри диска, не выходящего за пределы единичного круга, с центром в точке $(x_c; 0)$ и радиусом α , если для некоторой матрицы $R(\Theta) > 0$ справедливо неравенство*

$$\alpha^{-2}(A(\Theta) - x_c I)^T R(\Theta)(A(\Theta) - x_c I) - R(\Theta) < 0. \quad (5.56)$$

Используя теорему 5.5 и лемму 5.1, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 5.6. *Система (5.1)–(5.2) робастно стабилизируема законом управления в виде статической обратной связи по состоянию $u(k) = Kx(k)$, ее анизотропийная норма не превосходит заданного числа $\gamma > 0$ для известного уровня средней анизотропии $a \geq 0$ входного возмущения, а все полюсы замкнутой системы лежат внутри диска с центром $(x_c; 0)$ и радиусом α , лежащим внутри единичного круга на комплексной плоскости, для всех возможных неопределенностей, определяемых выражениями (5.3)–(5.4), если существуют такие матрицы $\Phi_i > 0$, $R_i > 0$, $\Psi > 0$, \bar{L} , \bar{G} и число $\eta > \gamma^2$, при которых справедливы неравенства*

$$\eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.57)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & \star & \star \\ B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.58)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{G} - \bar{G}^T + \Phi_i & \star & \star & \star \\ 0 & -\eta I_m & \star & \star \\ A_i \bar{G} + B_{ui} \bar{L} & B_{wi} & -\Phi_i & \star \\ C_i \bar{G} + D_{ui} \bar{L} & D_{wi} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.59)$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha^2 R_i & A_i \bar{G} - x_c \bar{G} + B_{ui} \bar{L} \\ \star & -\bar{G} - \bar{G}^T + R_i \end{bmatrix} < 0, \quad (5.60)$$

$i = \overline{1, r}$. При этом параметры регулятора определяются по формуле

$$K = \bar{L} \cdot \bar{G}^{-1}.$$

Доказательство. Неравенства (5.57)–(5.59) получены при доказательстве теоремы 5.5. Докажем теперь, что неравенство (5.60) задает желаемую область расположения полюсов замкнутой системы. Применим лемму о дополнении по Шуру к неравенству (5.56), получим

$$\begin{bmatrix} -\alpha^2 R(\Theta) & A(\Theta) - x_c I + B_u(\Theta)K \\ \star & -R^{-1}(\Theta) \end{bmatrix} < 0. \quad (5.61)$$

Рассмотрим невырожденную матричную переменную \bar{G} . Умножим слева и справа неравенство (5.61) на $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{G}^T \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix}$, соответственно, получим

$$\begin{bmatrix} -\alpha^2 R(\Theta) & A(\Theta) \bar{G} - x_c \bar{G} + B_u(\Theta)K \bar{G} \\ \star & -\bar{G}^T R^{-1}(\Theta) \bar{G} \end{bmatrix} < 0. \quad (5.62)$$

Блок (2, 2) в левой части неравенства (5.62) можно заменить выражением $(-\bar{G}^T - \bar{G} + R(\Theta))$. Введем матрицу $\bar{L} = K \bar{G}$ и предположим, что $R(\Theta) = \sum_{i=1}^r \theta_i R_i$ с $R_i > 0$. Тогда последнее неравенство с учетом (5.4) можно записать в форме

$$\sum_{i=1}^r \theta_i \begin{bmatrix} -\alpha^2 R_i & A_i \bar{G} - x_c \bar{G} + B_{ui} \bar{L} \\ \star & -\bar{G}^T - \bar{G} + R_i \end{bmatrix} < 0. \quad (5.63)$$

Неравенство (5.63) справедливо, если справедливы (5.60) для всех $i = \overline{1, r}$. Это завершает доказательство. ■

Теоремы 5.5 и 5.6 определяют непараметрические условия для синтеза робастного анизотропийного управления, которые являются выпуклыми и вычислительно реализуемыми. Эти условия позволяют также сформулировать оптимизационные задачи синтеза γ -оптимального регулятора как задачу выпуклой оптимизации.

Проблема синтеза γ -оптимального анизотропийного регулятора для политопической системы на основе теоремы 5.5 может быть решена следующим образом. Введем переменную $\xi = \gamma^2$ и рассмотрим задачу выпуклой оптимизации

$$\xi_* = \min \xi$$

на множестве переменных

$$\{\eta, \xi, \Phi_i, \Psi, \overline{G}, \overline{L}\},$$

удовлетворяющих неравенствам (5.57)–(5.59). Если решение существует, то анизотропийную норму замкнутой политопической системы можно оценить как $\gamma^* \approx \sqrt{\xi_*}$.

Пример 5.3. Рассмотрим систему с реализацией в пространстве состояний:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.7 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$B_{w1} = B_{w2} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{u1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{u2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{w1} = D_{w2} = 0.$$

Таблица 5.2. Результаты моделирования в примере 5.3.

Средняя анизотропия a	0	0.1	5
Закон управления K^T	$\begin{bmatrix} -0.9841 \\ -0.0914 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.0125 \\ -0.1039 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.9995 \\ -0.0821 \end{bmatrix}$
$\min \gamma$ на основе теоремы 5.5	1.1741	1.5549	2.0812
$\ F\ _a$ на основе теоремы 5.1	1.1522	1.5181	2.0623
$\ F\ _a$ на основе теоремы 5.2	1.1522	1.5201	2.0623
$\ F\ _a$ на основе теоремы 5.3	1.1524	1.5364	2.0623

Система является неустойчивой для некоторых значений θ_1 и θ_2 . Например, при $\theta_1 = 0.66$ и $\theta_2 = 0.34$ спектральный радиус матрицы $A(\Theta)$ равен $\rho(0.66A_1 + 0.34A_2) = 1.1195$. Результаты вычислительных экспериментов проиллюстрированы в таблице 5.2. Из таблиц видно, что результат оценки анизотропийной нормы политопической системы с использованием теоремы 5.3 очень близок к результату с использованием теоремы 5.1.

Рассмотрим применение полученных результатов при управлении подключенным к сети ШИМ-инвертором с LCL фильтром. Целью работы ШИМ-инвертора, подключенного к сети, является преобразование постоянного тока в синусоидальный с помощью широтно-импульсной модуляции (ШИМ). LCL фильтры, используемые на выходе ШИМ-инверторов, необходимы для уменьшения амплитуды высокочастотных гармоник, обеспечивая пригодный ток сети для потребителя. Таким образом, важной задачей управления для ШИМ-инверторов с LCL фильтрами является борьба с резонансными пиками и одновременным подавлением внешнего возмущения со стороны сети.

Функциональная схема однофазного ШИМ-инвертора с LCL фильтром, подключенного к сети в точке общего подключения, описанного в работе [190], показана на рис. 5.7.

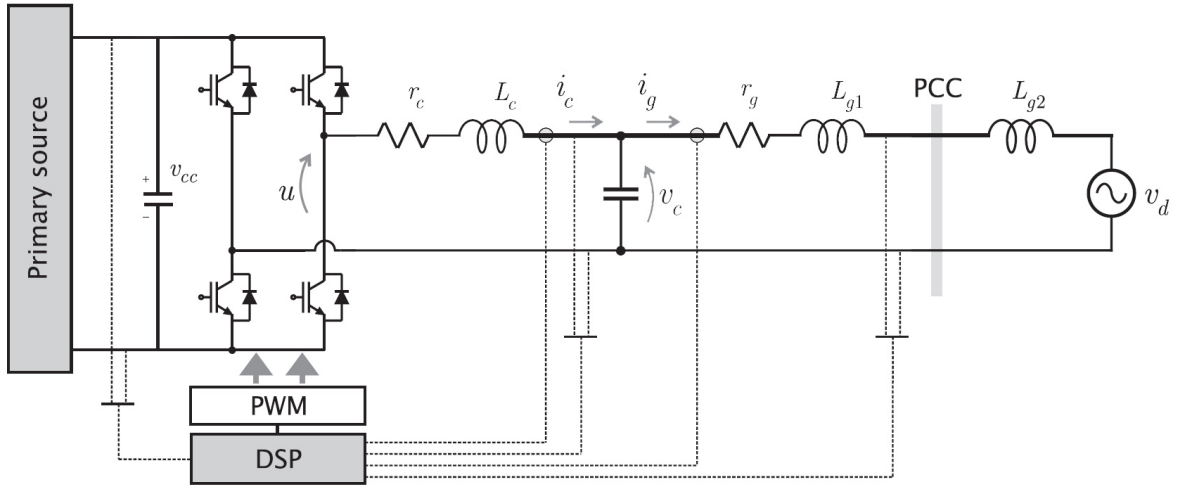


Рис. 5.7. ШИМ-инвертор с LCL фильтром, подключенный к сети.

Динамику LCL фильтра в пространстве состояний можно записать с помощью дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A^f x(t) + B_v^f v(t) + B_w^f v_d(t), \quad (5.64)$$

$$y(t) = C^f x(t). \quad (5.65)$$

Здесь вектор состояния $x(t) = [i_c(t) \ v_c(t) \ i_g(t)]^T$, $i_c(t)$ — ток конвертера, $v_c(t)$ — напряжение конденсатора, $i_g(t)$ — ток сети, $v(t)$ — управляющее напряжение, приложенное к конвертеру, $v_d(t)$ — возмущающее напряжение в сети.

Параметры системы определяются выражениями:

$$A^f = \begin{bmatrix} -\frac{r_c}{L_c} & -\frac{1}{L_c} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{L_g} & -\frac{r_g}{L_g} \end{bmatrix}, \quad B_v^f = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_w^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L_g} \end{bmatrix},$$

$$C^f = [0 \ 0 \ 1], \quad L_g = L_{g1} + L_{g2}.$$

Здесь L_c , L_{g1} , C и r_c — индуктивность, емкость и паразитное сопротивление LCL фильтра. Индуктивность сети L_{g2} и паразитное сопротивление сети r_g неизвестны и принадлежат интервалам $L_{g2} \in [L_{g2}^{\min}, L_{g2}^{\max}]$, $r_g \in [r_g^{\min}, r_g^{\max}]$.

Система непрерывного времени (5.64)–(5.65) дискретизируется с помощью экс-

траполятора нулевого порядка как

$$A^d = e^{A^f h}, B_*^d = \int_0^h e^{A^f(h-\tau)} B_*^f d\tau, C^d = C^f, \quad (5.66)$$

где h — шаг дискретизации, $*$ означает индекс v или w в зависимости от того, какая матрица B_*^f дискретизируется.

Замечание 5.1. Матричная экспонента $e^{A^f h}$ может быть вычислена с помощью разложения в ряд Тейлора по формуле

$$e^{A^f h} = I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A^j h^j}{j!}. \quad (5.67)$$

Целью работы конвертера, подключенного к сети, является поддержание постоянной амплитуды тока в сети на фундаментальной частоте (в данном случае 60 Гц). Для того, чтобы установившаяся ошибка на фундаментальной частоте была нулевой, в систему управления вводится пропорционально-резонансный регулятор, математическая модель которого определяется в виде:

$$x_{pr}(k+1) = R x_{pr}(k) + T(i_{ref}(k) - y(k)), \quad (5.68)$$

где $R = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $T = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$. Параметры a и b являются коэффициентами полинома

$$P(z) = (z - e^{j\omega h})(z - e^{-j\omega h})$$

с фундаментальной частотой $\omega = 60$ Гц. Параметр c — коэффициент усиления, который обеспечивает необходимое слежение. Параметры a , b , c выбираются следующим образом [190]:

$$R = \begin{bmatrix} 1.99965 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0.0078 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Так как параметры L_{g2} и r_g являются неопределенными, то неопределенности содержат матрицы A^d , B_w^d и B_v^d . Эти неопределенности можно представить

в виде политопических неопределенностей с $r = 2^N$ вершинами, где $N = 2$ — число неопределенных параметров, соответствующих значениям r_g и L_g . Также предполагается, что DSP-контроллер для расчета сигнала управления имеет задержку на один шаг. Математическая модель дискретизованного объекта с политопическими неопределенностями принимает вид:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) = & A(\Theta)\xi(k) + B_u(\Theta)u(k) + \\ & + B_w(\Theta)v_d(k) + B_r(\Theta)i_{ref}(k), \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$z(k) = C(\Theta)\xi(k), \quad (5.70)$$

где

$$\begin{aligned} A(\Theta) = & \begin{bmatrix} A^d(\Theta) & B_v^d(\Theta) & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ -TC^d & \mathbf{0}_{2 \times 1} & R \end{bmatrix}, \quad B_u(\Theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}, \\ B_w(\Theta) = & \begin{bmatrix} B_w^d(\Theta) \\ 1 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \end{bmatrix}, \quad B_r(\Theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 0 \\ T \end{bmatrix}, \\ C(\Theta) = & \begin{bmatrix} C^d & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Параметры расширенной модели (5.69)–(5.70) вычисляются с помощью метода дискретизации, определенном выражением (5.66), с частотой дискретизации $1/h = 20040$. Для вычисления матричной экспоненты были взяты 5 членов ряда Тейлора, определяемого выражением (5.67). Заметим также, что дискретизованная политопическая модель является приближенной для непрерывной системы, так как линейные вариации параметров r_g и L_g в непрерывной системе приводят к нелинейным вариациям в дискретизованной системе. Несмотря на это, максимальное рассогласование не превышает 0.4%, что является приемлемым для дальнейших рассуждений. Параметры конвертера приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3. Параметры конвертера.

Тип параметра	Обозначение	Значение
Индуктивность конвертера	L_c	1 мГн
Паразитное сопротивление конвертера	r_c	0.1 Ом
Индуктивность сети	L_{g1}	0.5 мГн
Емкость LCL фильтра	C	25 $\mu\Phi$
Макс. индуктивность сети	L_{g2}^{\max}	1 мГн
Мин. индуктивность сети	L_{g2}^{\min}	0 мГн
Мин. паразитное сопротивление сети	r_g^{\min}	0 Ом
Мин. паразитное сопротивление сети	r_g^{\max}	0.3 Ом

Математическая модель объекта управления для параметров, представленных в Таблице 5.3, имеет вид: $A^d(\Theta) = \sum_{i=1}^4 A_i \theta_i$, $B_v^d(\Theta) = \sum_{i=1}^4 B_{vi} \theta_i$, $B_w^d(\Theta) = \sum_{i=1}^4 B_{wi} \theta_i$ и $C(\Theta) = C^d$, где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.9466 & -0.0473 & 0.0485 \\ 1.8933 & 0.8544 & -1.8981 \\ 0.0970 & 0.0949 & 0.9029 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0.9466 & -0.0473 & 0.0480 \\ 1.8938 & 0.8553 & -1.8697 \\ 0.0960 & 0.0935 & 0.8753 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0.9461 & -0.0484 & 0.0490 \\ 1.9364 & 0.9182 & -1.9413 \\ 0.0327 & 0.0324 & 0.9673 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 0.9461 & -0.0484 & 0.0489 \\ 1.9364 & 0.9183 & -1.9315 \\ 0.0326 & 0.0322 & 0.9575 \end{bmatrix}, \\
 B_{v1} &= \begin{bmatrix} 0.0490 \\ 0.0485 \\ 0.0016 \end{bmatrix}, & B_{v2} &= \begin{bmatrix} 0.0490 \\ 0.0485 \\ 0.0016 \end{bmatrix}, & B_{v3} &= \begin{bmatrix} 0.0490 \\ 0.0490 \\ 0.0005 \end{bmatrix}, & B_{v4} &= \begin{bmatrix} 0.0490 \\ 0.0490 \\ 0.0005 \end{bmatrix}, \\
 B_{w1} &= \begin{bmatrix} -0.0016 \\ 0.0971 \\ -0.0965 \end{bmatrix}, & B_{w2} &= \begin{bmatrix} -0.0016 \\ 0.0962 \\ -0.0951 \end{bmatrix}, & B_{w3} &= \begin{bmatrix} -0.0005 \\ 0.0327 \\ -0.0329 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$B_{w4} = \begin{bmatrix} -0.0005 \\ 0.0326 \\ -0.0327 \end{bmatrix}, \quad C^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Область \mathcal{D} на комплексной плоскости, которая ограничивает расположение полюсов замкнутой системы, определяется следующим образом [190]:

$$\alpha = 0.49, \quad x_c = 0.5, \quad a = 0.15, \quad \gamma^2 = 2.$$

Анизотропийный регулятор K_a , полученный с помощью теоремы 5.6, а также \mathcal{H}_∞ регулятор K_∞ , полученный в работе [190] (с параметром $\mu = 100$), приведены в таблице 5.4.

Таблица 5.4. Параметры регуляторов.

K_a	K_∞
-4.988444	-21.253614
1.021542	-1.367197
2.915009	4.299398
-0.169462	-0.919720
11.885408	104.362022
-11.706463	-103.446202

Собственные значения замкнутой системы показаны на рис. 5.8.

На рис. 5.9 представлены графики АЧХ и ФЧХ от задающего входа $i_{ref}(t)$ к выходу $i_g(t)$ для двух видов регуляторов. На рис. 5.11 представлены графики АЧХ и ФЧХ в увеличенном масштабе в районе фундаментальной частоты $\omega = 60$ Гц, которые позволяют оценить качество слежения за фундаментальной частотой. Как видно из рисунков, анизотропийный регулятор позволяет повысить качество слежения при отклонениях в фундаментальной частоте.

Чтобы показать качество слежения за задающим воздействием в замкнутой системе при наличии неопределенностей, предположим, что $L_{g2}(k) = \theta(k)L_{g2}^{\min} +$

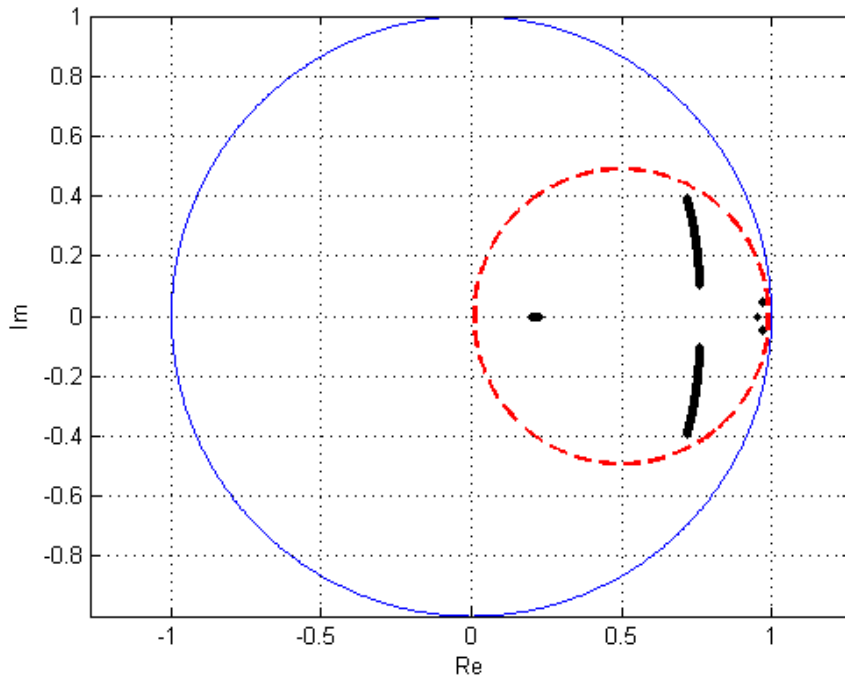


Рис. 5.8. Собственные значения замкнутой системы для разных значений r_g и L_g .

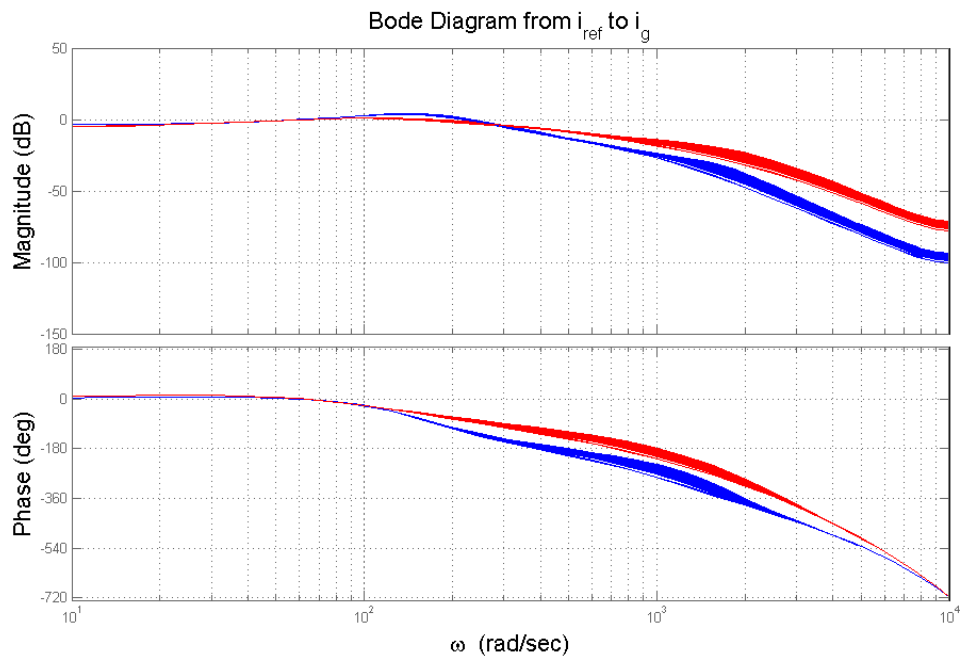


Рис. 5.9. АЧХ и ФЧХ замкнутой системы от i_{ref} к i_g для разных значений L_g : голубая линия — анизотропный регулятор, красная линия — \mathcal{H}_∞ -регулятор, взятый из работы [190].

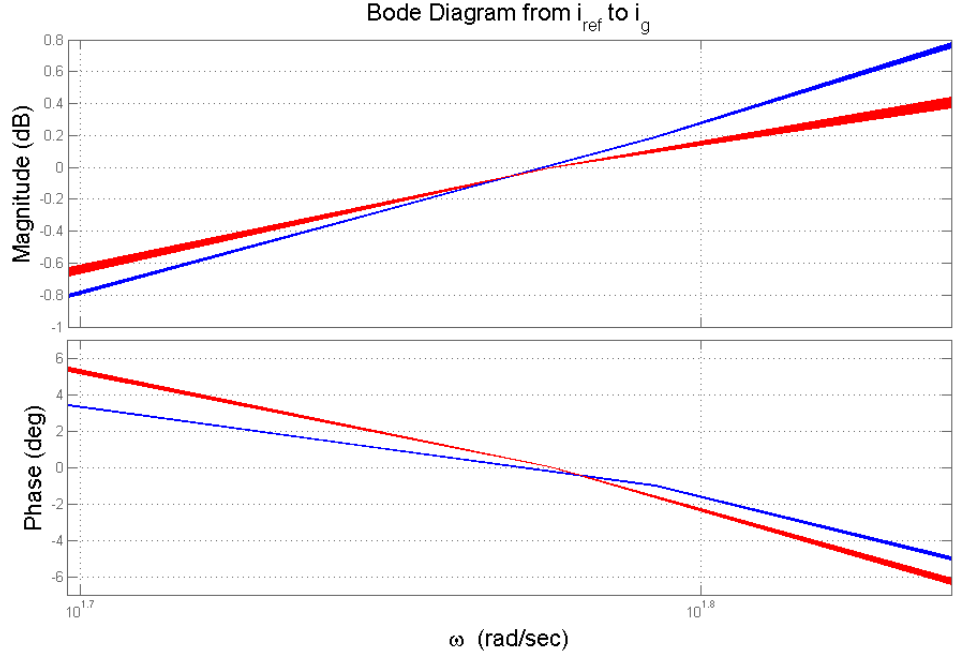


Рис. 5.10. АЧХ и ФЧХ замкнутой системы от i_{ref} к i_g для разных значений L_{g2} в увеличенном масштабе: голубая линия — анизотропийный регулятор, красная линия — \mathcal{H}_∞ -регулятор, взятый из работы [190].

$(1-\theta(k))L_{g2}^{\max}$ and $r_g(k) = \theta(k)r_g^{\min} + (1-\theta(k))r_g^{\max}$ with $\theta(k)$ изменяется по закону

$$\theta(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < 0.05/h, \\ 0.5, & 0.05/h \leq k < 0.1/h, \\ 1, & 0.1/h \leq k \leq 0.15/h. \end{cases} \quad (5.71)$$

Задающий сигнал $i_{ref}(t)$ предполагается синусоидой с амплитудой, изменяющейся по закону:

$$I_{ref} = \begin{cases} 10 \text{ A}, & \text{если } 0 \leq t < 0.1; \\ 20 \text{ A}, & \text{если } 0.1 \leq t < 0.2. \end{cases}$$

Входное возмущение имеет вид:

$$v_d(k) = v_d^{(1)}(k) + v_d^{(2)}(k),$$

где $v_d^{(1)}(k)$ — возмущающее напряжение в сети, изменяющееся по закону

$$v_d^{(1)}(k) = 110\sqrt{2} \sin(\hat{\omega}kT_s + \varphi)$$

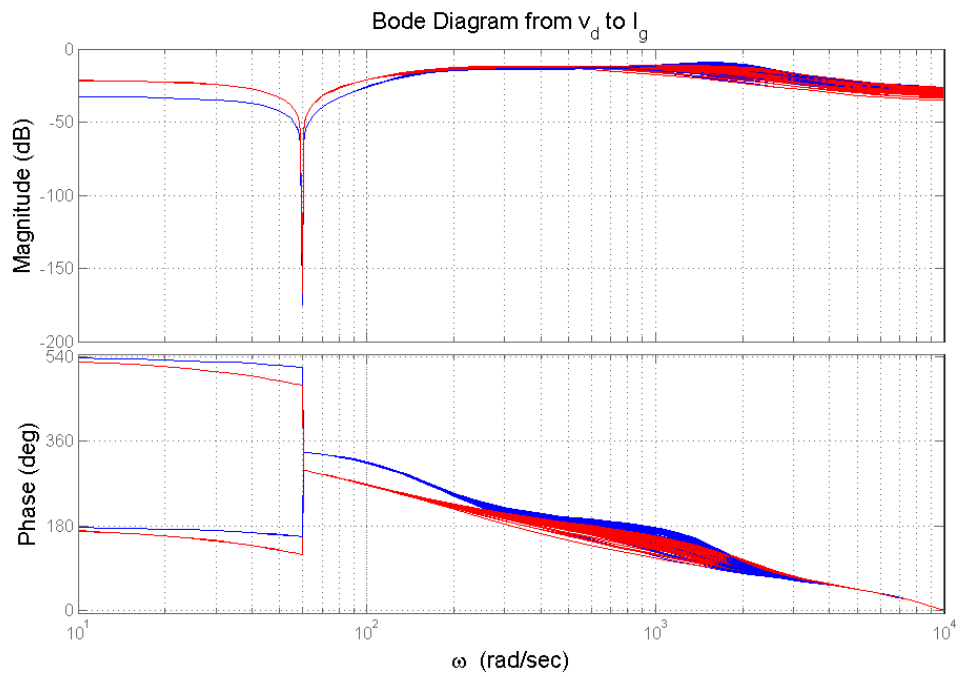


Рис. 5.11. АЧХ и ФЧХ замкнутой системы от v_d к i_g для разных значений L_{g2} : голубая линия — анизотропный регулятор, красная линия — \mathcal{H}_∞ -регулятор, взятый из работы [190].

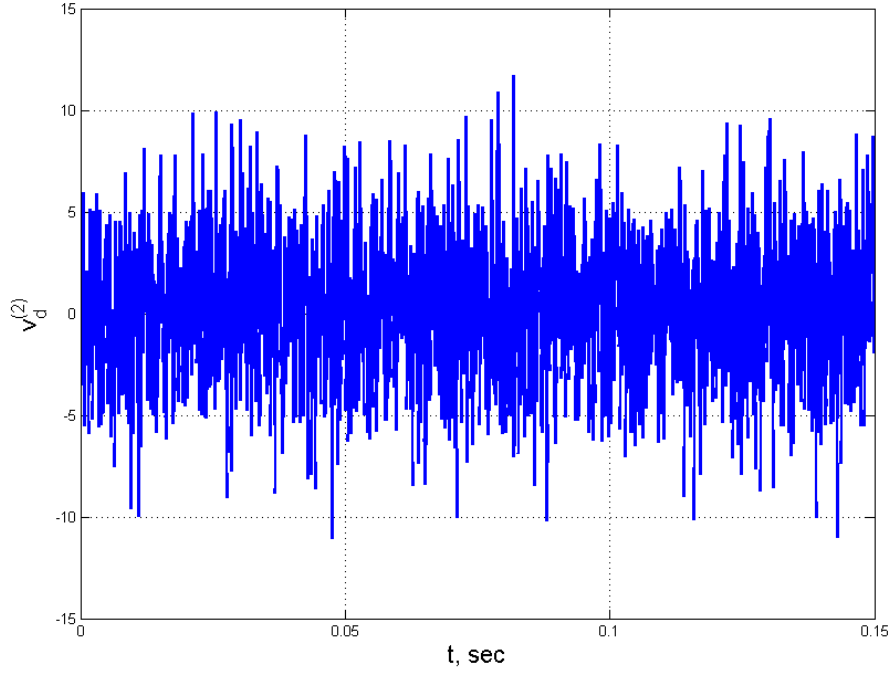


Рис. 5.12. Реализация входного возмущения $v_d^{(2)}(t)$.

с $\hat{\omega} = 60 + \Delta\omega$ Гц, (отклонение от фундаментальной частоты лежит в интервале $\Delta\omega \in [-2; 2]$), $\varphi = \pi/10$ — фазовый сдвиг, а слагаемое $v_d^{(2)}(k)$ — стационарная гауссовская последовательность, которая генерируется фильтром

$$\begin{aligned}\eta(k+1) &= 0.195\eta(k) + n(k), \\ v_d^{(2)}(k) &= 3\eta(k) + 1.08n(k),\end{aligned}$$

из гауссовского белого шума $n(k)$ с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Средняя анизотропия последовательности $v_d^{(2)}(k)$ равна $\overline{\mathbf{A}}(V_d^{(2)}) = 0.151$. Реализация возмущения показана на рис. 5.12.

Входное возмущение сети представлено на рис. 5.13.

Результаты моделирования замкнутой системы показаны на рис. 5.14 и 5.15. Как видно из рис. 5.15, оба регулятора обеспечивают хорошие следящие свойства в замкнутой системе при наличии шумов измерения. Однако анизотропный регулятор имеет ряд преимуществ. Во-первых, величины коэффициентов регулятора на порядок меньше для той же области \mathcal{D} расположения собственных чисел матрицы замкнутой системы при более высоком быстродействии за-

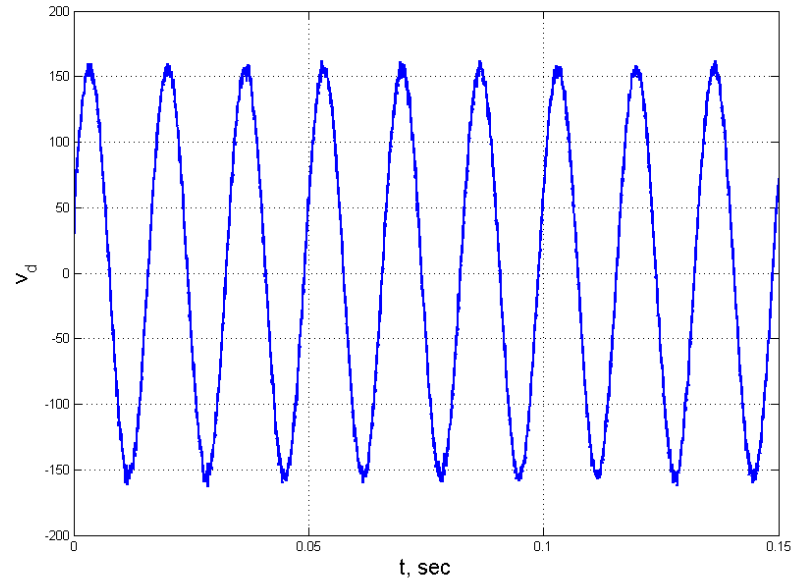


Рис. 5.13. Реализация возмущения в сети $v_d(t)$.

мкнутой системы. Во-вторых, управление, полученное с помощью анизотропийного регулятора, более гладкое, чем управление с помощью \mathcal{H}_∞ регулятора.

Таким образом, анизотропийный регулятор позволяет получить лучшее качество слежения за задающим воздействием при меньших значениях коэффициентов регулятора в цепи обратной связи. Кроме того, амплитуда управляющего воздействия в установившемся режиме при воздействии случайных возмущений ниже, чем у \mathcal{H}_∞ регулятора с такими же характеристиками.

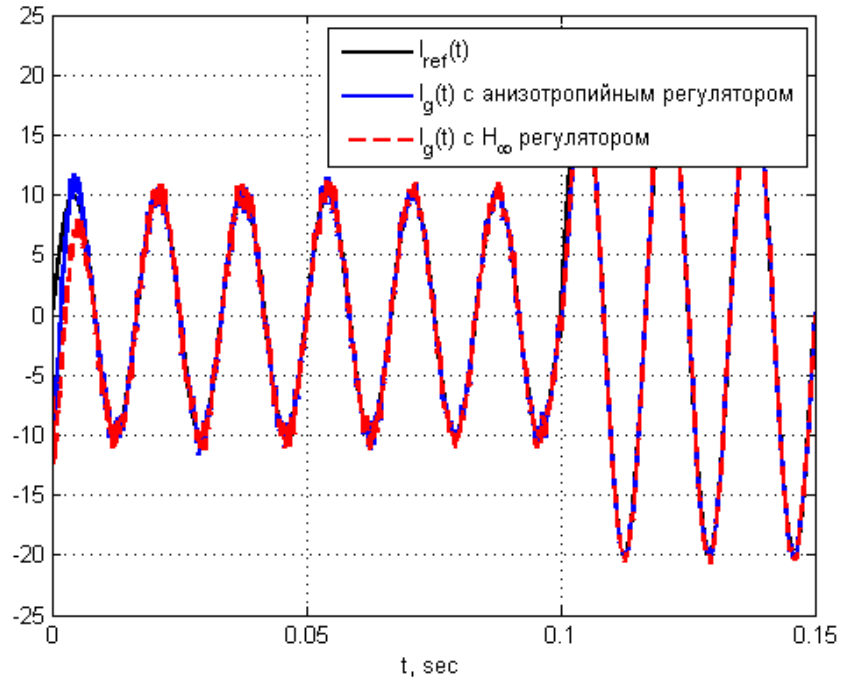


Рис. 5.14. Моделирование динамики системы для слежения за задающим током $i_{ref}(t)$.

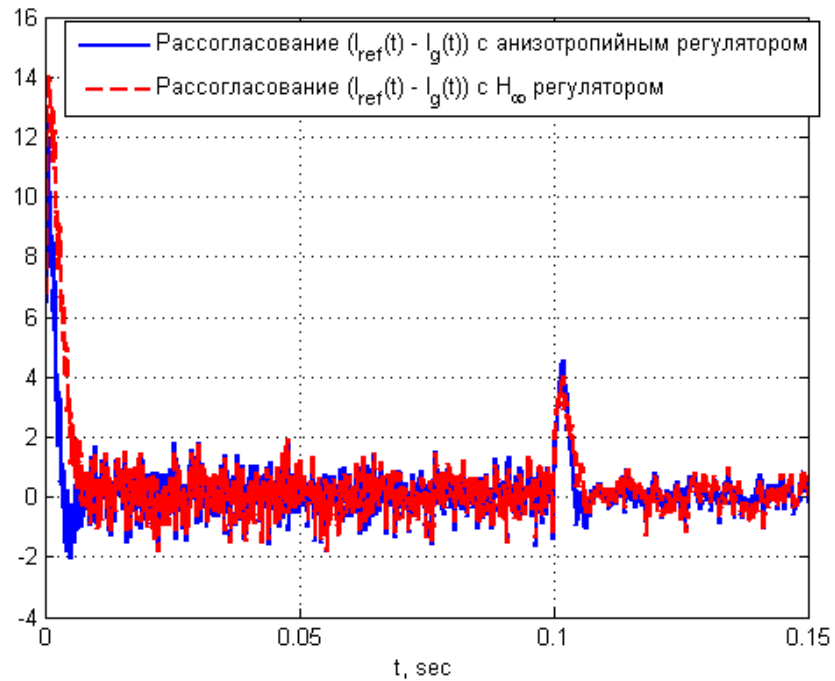


Рис. 5.15. Ошибка слежения за задающим током $i_{ref}(t)$.

5.2. Анизотропийный анализ и синтез анизотропийных регуляторов для систем с ограниченными по норме неопределенностями

Задачи анализа синтеза систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями в хорошо известных \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ теориях решались разными зарубежными учеными. Решение задач субоптимального управления по состоянию для дискретных систем с ограниченными по норме неопределенностями приведено в работах [88, 177, 272]. Задачи управления по выходу были решены в [269]. Также стоит отметить, что в работе [88] были получены условия, при которых замкнутая система является асимптотически устойчивой при нестационарных неопределенностях.

Задача синтеза робастных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями и анизотропийным критерием качества была впервые решена в [26, 173]. В этих работах параметры регулятора определялись из решения связанных между собой нелинейных матричных уравнений, что приводило к значительным сложностям при численной реализации разработанной методики. Данный недостаток был преодолен с применением матричных неравенств. Условия синтеза статических и динамических регуляторов на основе методов выпуклой оптимизации были сформулированы в работах [31, 260]. Решение одной из задач робастного анизотропийного управления для параметрически неопределенной дискретной системы на основе матричных неравенств и с использованием методов выпуклой оптимизации можно найти в работе [259]. Работа [259] посвящена синтезу субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию для систем с дробно-линейными параметрическими неопределенностями. Можно показать, что в определенных случаях параметрические неопределенности объекта управления можно представить как в виде дробно-линейных, так и в виде ограниченных по норме неопределенностей, рассмот-

ренных в настоящем разделе. Однако множества систем, описываемых дробно-линейными и ограниченными по норме неопределенностями, хотя и имеют взаимное пересечение, описывают разные классы неопределенных систем [75]. Таким образом, постановка и решение задач анизотропийного анализа и синтеза анизотропийных регуляторов для систем с ограниченными по норме неопределенностями позволит расширить класс объектов, для которых можно применить анизотропийную теорию.

5.2.1. Анизотропийный анализ систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями

Рассмотрим постановку задачи анизотропийного анализа систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Система в пространстве состояний записывается в виде:

$$x(k+1) = (A + M_A \Delta N_A)x(k) + (B + M_B \Delta N_B)w(k), \quad (5.72)$$

$$y(k) = (C + M_C \Delta N_C)x(k) + (D + M_D \Delta N_D)w(k), \quad (5.73)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайное внешнее возмущение с нулевым средним и ограниченной средней анизотропией $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$, $a \geq 0$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход системы, $\Delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ неизвестная матрица с ограниченной нормой $\Delta^T \Delta \leq I_s$. Для системы (5.72)–(5.73) введем для удобства обозначения $A_\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_\Delta = B + M_B \Delta N_B$, $C_\Delta = C + M_C \Delta N_C$, $D_\Delta = D + M_D \Delta N_D$.

Определение анизотропийной нормы системы (5.72)–(5.73) вводится аналогично определению 4.4 и формулируется следующим образом.

Определение 5.2. *Анизотропийная норма системы (5.72)–(5.73) для случайного сигнала $W = \{w(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ с нулевым средним и ограниченным уровнем средней анизотропии $\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a$ определяется соотношением*

$$\|F_\Delta\|_a = \sup_{\Delta: \Delta^T \Delta \leq I_s} \sup_{W: A(W) \leq a} \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}},$$

где $Y = \{y(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Задача 5.3. Задача робастного анизотропийного анализа для систем с ограниченными по норме неопределенностями заключается в проверке робастной устойчивости системы (5.72)–(5.73) и ограниченности сверху ее анизотропийной нормы

$$\|F_{\Delta}\|_a < \gamma$$

для известного уровня средней анизотропии случайного входного возмущения $a \geq 0$ и заданного числа $\gamma > 0$ при всех возможных значениях неопределенных параметров.

Ниже приведем решение задачи анизотропийного анализа на основе теоремы 2.4. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 5.7. Для заданных действительных чисел $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ система (5.72)–(5.73) робастно устойчива, а ее анизотропийная норма ограничена сверху параметром γ , т.е. $\|F_{\Delta}\|_a < \gamma$, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, а также $n \times n$ -матрица $\Phi = \Phi^T > 0$, $n \times n$ -матрица $\Pi = \Pi^T > 0$: $\Phi\Pi = I_n$, $t \times t$ -матрица $\Psi = \Psi^T > 0$ и $n \times n$ -матрица Y , для которых справедливы следующие неравенства:

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.74)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^T & N_1^T \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.75)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 N_2^T N_2 & M_2 \\ M_2^T & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0. \quad (5.76)$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B^T & D^T \\ B & -\Pi & 0 \\ D & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^T & YA & YB & \Phi^T - Y^T - \frac{1}{2}Y & 0 \\ A^T Y^T & -\Phi & 0 & A^T Y^T & C^T \\ B^T Y^T & 0 & -\eta I_m & B^T Y^T & D^T \\ \Phi - Y - \frac{1}{2}Y^T & YA & YB & -Y - Y^T & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -I_p \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} YM_A & YM_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ YM_A & YM_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C & M_D \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы подставим параметры системы (5.72)–(5.73), содержащие неопределенности, в условия теоремы 2.4. Неравенство (2.87) не позволяет отделить неопределенность от известных матриц. Поэтому введем переменную $\Psi = \Psi^T > 0$, которая удовлетворяет неравенству

$$\Psi < \eta I_m - B_\Delta^T \Phi B_\Delta - D_\Delta^T D_\Delta. \quad (5.77)$$

Тогда с учетом (5.77), неравенство (2.87) эквивалентно неравенству (5.74).

Используя дополнение по Шуру, неравенство (5.77) может быть преобразовано к виду

$$\Psi - \eta I_m - \begin{bmatrix} B_\Delta^T & D_\Delta^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi^{-1} & 0 \\ 0 & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\Delta \\ D_\Delta \end{bmatrix} < 0$$

или

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B_\Delta^T & D_\Delta^T \\ B_\Delta & -\Phi^{-1} & 0 \\ D_\Delta & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (5.78)$$

Неравенство (5.78) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B^T & D^T \\ B_\Delta & -\Phi^{-1} & 0 \\ D & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) < 0. \quad (5.79)$$

Применяя последовательно лемму Петерсена 1.3 и лемму о дополнении Шура 1.4 с учетом того, что $\Phi^{-1} = \Pi$, получаем (5.75).

Неравенство (2.88) для системы (5.72)–(5.73) примет форму

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^T & YA & YB & \Phi^T - Y^T - \frac{1}{2}Y & 0 \\ A^T Y^T & -\Phi & 0 & A^T Y^T & C^T \\ B^T Y^T & 0 & -\eta I_m & B^T Y^T & D^T \\ \Phi - Y - \frac{1}{2}Y^T & YA & YB & -Y - Y^T & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -I_p \end{bmatrix} + \text{He} \left(\begin{bmatrix} YM_A & YM_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ YM_A & YM_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_C & M_D \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} 0 & N_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) < 0. \quad (5.80)$$

Используя лемму Петерсена 1.3 неравенство (5.80) может быть преобразовано к виду (5.76). Выражение (5.74) совпадает с выражением (2.87) из теоремы 2.4. Таким образом, $\|F_\Delta\|_a < \gamma$, что и завершает доказательство. ■

Замечание 5.2. Условия теоремы 5.7 являются невыпуклыми, так как одним из условий является существование взаимнообратных матриц. Для решения задачи анизотропийного анализа обыкновенной системы с ограниченными по норме неопределенностями можно воспользоваться существующими алгоритмическими методами поиска взаимнообратных матриц.

Условия теоремы 5.7 позволяют оценить верхнюю границу анизотропийной нормы системы (5.72)–(5.73). Для этого введем обозначение $\xi = \gamma^2$, тогда за-

дача оценки верхней границы анизотропийной нормы неопределенной системы может быть записана как

$$\xi_* = \min \xi$$

на множестве переменных

$$\{\eta, \xi, \Phi, \Psi, \Pi, Y, \varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

удовлетворяющим условиям теоремы 5.7. После того, как будет найдено минимальное значение ξ_* , верхняя граница анизотропийной нормы системы $F_\Delta(z)$ определяется выражением

$$\|F_\Delta\|_a \approx \sqrt{\xi_*}.$$

Выпуклые условия анизотропийного анализа системы (5.72)–(5.73) можно получить, используя лемму 1.5. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.8. *Для заданных действительных чисел $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ система (5.72)–(5.73) робастно устойчива, а ее анизотропийная норма ограничена сверху параметром γ , т.е. $\|F_\Delta\|_a < \gamma$, если существуют такие числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, а также $n \times n$ -матрица $Y = Y^T > 0$, $m \times m$ -матрица $\Psi = \Psi^T > 0$, для которых справедливы следующие неравенства:*

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.81)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^T & N_1^T \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.82)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 M_2 M_2^T & N_2^T \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0. \quad (5.83)$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B^T & D^T \\ B & -Y & 0 \\ D & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Y & 0 & YA^T & YC^T \\ 0 & -\eta I_m & B^T & D^T \\ AY & B & -Y & 0 \\ CY & D & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad (5.84)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & M_D \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} N_A Y & 0 & 0 & 0 \\ N_C Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.85)$$

Доказательство. Запишем для системы (5.72)–(5.73) условия леммы 1.5. Тогда неравенство (1.54) запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} -Y^{-1} & 0 & A_{\Delta}^T & C_{\Delta}^T \\ 0 & -\eta I_m & B_{\Delta}^T & D_{\Delta}^T \\ A_{\Delta} & B_{\Delta} & -Y & 0 \\ C_{\Delta} & D_{\Delta} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (5.86)$$

Умножим неравенство (5.86) справа и слева на матрицу $\text{diag}(Y, I_m, I_n, I_p)$, получим

$$\begin{bmatrix} Y & 0 & YA_{\Delta}^T & YC_{\Delta}^T \\ 0 & -\eta I_m & B_{\Delta}^T & D_{\Delta}^T \\ A_{\Delta}Y & B_{\Delta} & Y & 0 \\ C_{\Delta}Y & D_{\Delta} & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \quad (5.87)$$

Учитывая введенные ранее обозначения, последнее неравенство можно представить в виде выражения

$$\Omega + M_2 \Delta N_2 < 0,$$

где матрицы Ω , M_2 и N_2 определяются выражениями (5.84) и (5.85) соответственно. Применяя к последнему неравенству лемму Петерсена и дополнение по Шуру, получаем (5.83). Неравенство (5.82) получается с помощью приведения неравенства (1.53) к виду

$$\Xi + M_1 \Delta N_1 < 0$$

и аналогичного применения леммы Петерсена и дополнения по Шуру. ■

Оценку анизотропийной нормы можно также сформулировать как задачу выпуклой оптимизации, аналогичную рассмотренной выше.

Приведем численный пример.

Пример 5.4. Рассмотрим систему, в которой все параметры являются неопределенными.

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 2 \\ 0.13 & -0.18 & -0.66 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 2 \ 0], \quad D = [0.1 \ -0.05],$$

Неопределенности выражаются через следующие матрицы:

$$M_A = [0.25 \ -0.7 \ 0.15]^T, \quad N_A = [0 \ 0.15 \ 0.21],$$

$$M_B = [0 \ 0 \ 0.2]^T, \quad N_B = [0.1 \ 0.3],$$

$$M_C = M_D = 0.2, \quad N_C = [0.05 \ 0.2 \ 0], \quad N_D = [0.02 \ 0.08].$$

Зададим точность вычисления взаимнообратных матриц $\epsilon = 10^{-7}$. Результаты вычисления анизотропийной нормы для различных уровней средней анизотропии представлены в таблице 5.5. В рассмотренном примере видно, что разница между верхней и нижней границами анизотропийной нормы является существенной. Представленный алгоритм дает верхнюю оценку анизотропийной нормы с достаточно высокой точностью.

5.2.2. Постановка задачи синтеза робастных регуляторов

Перейдем к постановке задачи синтеза робастных анизотропийных регуляторов. Будем рассматривать дискретные системы, заданные в пространстве со-

Таблица 5.5. Оценка анизотропийной нормы

Уровень средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W)$	0	0.1	0.5	1.5	10
Оценка $\ F_\Delta\ _a$ (теорема 5.7)	0.9597	1.1196	1.2786	1.4129	1.4790
Оценка $\ F_\Delta\ _a$ (теорема 5.8)	0.9598	1.1195	1.2785	1.4128	1.4790
Точная верхняя граница $\ F_\Delta\ _a$	0.7620	0.9382	1.1177	1.2661	1.3378
Норма номинальной системы $\ F\ _a$	0.6457	0.7859	0.9258	1.0423	1.0988
Точная нижняя граница $\ F_\Delta\ _a$	0.5500	0.6661	0.7779	0.8712	0.9170

стояний в виде:

$$x(k+1) = A^\Delta x(k) + B_w^\Delta w(k) + B_u u(k), \quad (5.88)$$

$$y(k) = C_y^\Delta x(k) + D_{yw}^\Delta w(k), \quad (5.89)$$

$$z(k) = C_z^\Delta x(k) + D_{zw}^\Delta w(k) + D_{zu} u(k), \quad (5.90)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ — управление, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ — случайная стационарная последовательность с нулевым средним и ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leq a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ — измеряемый выход, $z(k) \in \mathbb{R}^{p_1}$ — управляемый выход, $A^\Delta = A + M_A \Delta N_A$, $B_w^\Delta = B_w + M_B \Delta N_B$, $C_z^\Delta = C_z + M_C \Delta N_C$, $C_y^\Delta = C_y + M_{C_y} \Delta N_{C_y}$, $D_{yw}^\Delta = D_{yw} + M_{D_y} \Delta N_{D_y}$, $D_{zw}^\Delta = D_{zw} + M_D \Delta N_D$. Матрицы A , B_w , B_u , C_y , D_w , C_z , D_{zw} , D_{zu} , M_A , N_A , M_B , N_B , M_C , N_C , M_D , N_D , M_{C_y} , N_{C_y} , M_{D_y} и N_{D_y} — постоянные, имеющие соответствующие размерности. Матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{s \times s}$ — неизвестная матрица, удовлетворяющая условию $\Delta^T \Delta \leq I_s$.

Замечание 5.3. В случае если в уравнениях (5.88)–(5.89) выполнены равенства $M_A = M_B$, $N_A = N_C$, $N_B = N_D$, $M_C = M_D$, то данная система может быть записана через дробно-линейные неопределенности [259]. В противном случае получить эквивалентное представление через дробно-линейные неопределенности невозможно.

Сформулируем задачи управления, которые будут решены далее.

Задача 5.4. (Задача синтеза статического регулятора по состоянию) Для заданных скалярных величин $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти управление по состоянию в виде

$$u(k) = Fx(k), \quad F \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, \quad (5.91)$$

которое стабилизирует систему (5.88)–(5.90) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ , т.е. $\|\mathcal{F}_{cl}^{sf}\|_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.

Задача 5.5. (Задача синтеза статического регулятора по выходу) Для заданных скалярных величин $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде статической обратной связи по выходу

$$u(k) = Ky(k), \quad K \in \mathbb{R}^{m_1 \times p}, \quad (5.92)$$

который стабилизирует систему (5.88)–(5.90) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ , т.е. $\|\mathcal{F}_{cl}^{out}\|_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.

Задача 5.6. (Задача синтеза динамического регулятора по выходу) Для заданных скалярных величин $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде динамической обратной связи по выходу

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_\xi \xi(k) + B_\xi u(k), \\ u(k) &= C_\xi \xi(k) + D_\xi u(k), \end{aligned}$$

где $\xi(k) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ ($n_\xi \leq n$) — состояние регулятора, который стабилизирует систему (5.88)–(5.90) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ , т.е. $\|\mathcal{F}_{cl}^{out}\|_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.

5.2.3. Синтез робастного анизотропийного регулятора по состоянию

Для решения задачи 5.4 с использованием теоремы 5.7 будем полагать, что $D_{zu} = 0$ и $p_1 \leq m$. Тогда система (5.88)–(5.90), замкнутая управлением (5.91),

определяется выражениями:

$$x(k+1) = (A^\Delta + B_u F) x(k) + B_w^\Delta w(k), \quad (5.93)$$

$$z(k) = C_z^\Delta x(k) + D_{zw}^\Delta w(k). \quad (5.94)$$

Для решения задачи синтеза запишем двойственную систему для системы (5.93)–(5.94). Она имеет вид:

$$x'(k+1) = (A^\Delta + B_u F)^\top x'(k) + (C_z^\Delta)^\top w'(k), \quad (5.95)$$

$$z'(k) = (B_w^\Delta)^\top x'(k) + (D_{zw}^\Delta)^\top w'(k). \quad (5.96)$$

Подставим матрицы двойственной системы в неравенство (2.88) из теоремы 2.4 и вынесем в отдельное слагаемое комбинацию с Δ :

$$\Omega + \text{He} (M_1 \Delta N_1) < 0, \quad (5.97)$$

где

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & 0 \\ \star & -\Phi & 0 & AY^\top + B_u \Lambda^\top & B_w \\ \star & \star & -\eta I_{p_1} & C_z Y^\top & D_{zw} \\ \star & \star & \star & -Y - Y^\top & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -I_m \end{bmatrix}, \quad (5.98)$$

$$\Omega_{11} = -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^\top, \quad \Omega_{12} = YA^\top + \Lambda B_u^\top, \quad \Omega_{13} = YC_z^\top, \quad \Omega_{14} = \Phi - Y^\top - \frac{1}{2}Y,$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & 0 & M_D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_A Y^\top & 0 & 0 & N_B Y^\top & 0 \\ N_C Y^\top & 0 & 0 & N_C Y^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_D \end{bmatrix}. \quad (5.99)$$

Здесь используется обозначение $\Lambda^\top = FY^\top$, откуда следует, что $F = \Lambda^\top Y^{-\top}$.

Согласно лемме 1.3, для выполнения неравенства (5.97) требуется существование такого $\varepsilon_1 > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$\Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top + \frac{1}{\varepsilon_1} N_1^\top N_1 < 0. \quad (5.100)$$

Неравенство (2.87) из теоремы 2.4 для некоторой $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ можно записать в виде системы [31]

$$\begin{cases} \eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \\ \eta I_m - B^T \Phi B - D^T D > \Psi. \end{cases} \quad (5.101)$$

Запишем аналог (5.101) для системы (5.95)–(5.96). В этом случае введем матрицу $\Psi \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_1}$ и получим

$$\begin{cases} \eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/p_1} < \gamma^2, \\ \eta I_{p_1} - C_z^\Delta \Phi (C_z^\Delta)^T - D_{zw}^\Delta (D_{zw}^\Delta)^T > \Psi. \end{cases} \quad (5.102)$$

Последнее неравенство системы (5.102) можно переписать в виде

$$\eta I_{p_1} - \Psi - C_z^\Delta (-\Phi^{-1})^{-1} (C_z^\Delta)^T - D_{zw}^\Delta (-I)^{-1} (D_{zw}^\Delta)^T > 0,$$

где $(-\Phi^{-1})^{-1} < 0$. Дважды применив лемму о дополнении Шура к последнему неравенству и обозначив $\Pi = \Phi^{-1}$, получим, что

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z^\Delta & D_{zw}^\Delta \\ \star & -\Pi & 0 \\ \star & \star & -I_m \end{bmatrix} < 0. \quad (5.103)$$

Теперь можно сформулировать теорему 5.9, дающую достаточные условия для построения робастного субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию.

Теорема 5.9. *Для заданных значений $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ задача 5.4 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$ -матрица $\Phi = \Phi^T > 0$, $(n \times n)$ -матрица $\Pi = \Pi^T > 0$, $(p_1 \times p_1)$ -матрица $\Psi > 0$, $(n \times n)$ -матрица Y и $(n \times m_1)$ -матрица Λ такие, что выполнены неравенства*

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^T & N_1^T \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{5s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.104)$$

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/p_1} < \gamma^2, \quad (5.105)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U} + \varepsilon_2 M_2 M_2^T & N_2^T \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.106)$$

причем

$$\Phi\Pi = I_n. \quad (5.107)$$

Матрица Ω задается выражением (5.98), матрицы M_1 и N_1 определяются из выражения (5.99), а

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z & D_{zw} \\ \star & -\Pi & 0 \\ \star & \star & -I_m \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} M_C & M_D \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_C & 0 \\ 0 & 0 & N_D \end{bmatrix}.$$

Параметры регулятора определяются из соотношения

$$F = \Lambda^T Y^{-T}.$$

Для доказательства теоремы 5.9 представим слагаемое $\frac{1}{\varepsilon_1} N_1^T N_1$ в форме $(-N_1^T)(-\varepsilon_1 I)^{-1} N_1$. Очевидно, что $(-\varepsilon_1 I) < 0$. Используя дополнение по Шуру для неравенства (5.100), получаем неравенство (5.104). Неравенство (5.106) получается из неравенства (5.103) путем выделения слагаемых, содержащих Δ , и применения леммы 1.3 (леммы Петерсена).

Если неопределенность содержится только в матрице A^Δ системы (5.88)–(5.90), то неравенство (5.109) сводится к виду

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} + C_z \Phi C_z^T & D_{zw} \\ D_{zw}^T & -I_m \end{bmatrix} < 0.$$

В данном случае условия теоремы 5.9 для синтеза робастного регулятора по состоянию являются выпуклыми.

Если параметрические неопределенности представлены не только в матрице A^Δ , то условия теоремы 5.9 являются невыпуклыми и требуют поиска взаимнообратных матриц. Для того, чтобы избежать поиска взаимнообратных матриц,

цы, предложим следующий выход. Введем невырожденную неизвестную матрицу $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и рассмотрим матрицу

$$W = \begin{bmatrix} I_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Умножим неравенство (5.103) слева и справа на W и W^T соответственно и получим, что

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z^\Delta G^T & D_{zw}^\Delta \\ \star & -G\Pi G^T & 0 \\ \star & \star & -I_m \end{bmatrix} < 0. \quad (5.108)$$

Принимая во внимание, что $\Pi = \Phi^{-1}$ и $\Phi > 0$, получаем справедливое неравенство

$$-(G - \Phi)\Phi^{-1}(G - \Phi)^T \leq 0,$$

откуда следует, что

$$-G\Pi G^T \leq -G - G^T + \Phi.$$

Выполним замену выражения $(-G\Pi G^T)$ на выражение $(-G - G^T + \Phi)$ в неравенстве (5.108). Получим новые условия синтеза робастного анизотропийного регулятора в форме обратной связи по состоянию, которые можно сформулировать в теореме 5.10.

Теорема 5.10. *Для заданных значений $\alpha \geq 0$ и $\gamma > 0$ задача 5.4 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$ -матрица $\Phi > 0$, невырожденная $(n \times n)$ -матрица G , $(p_1 \times p_1)$ -матрица $\Psi > 0$, $(n \times n)$ -матрица Y и $(n \times m_1)$ -матрица Λ такие, что выполнены неравенства (5.104) и (5.105), параметры Ω , M_1 и N_1 которых определяются выражениями (5.98) и (5.99) соответственно, а также справедливо неравенство*

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_2 M_2 M_2^T & N_2^T \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.109)$$

где

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z G^T & D_{zw} \\ \star & -G - G^T + \Phi & 0 \\ \star & \star & -I_m \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} M_C & M_D \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_C G^T & 0 \\ 0 & 0 & N_D \end{bmatrix}.$$

Обе теоремы 5.9 и 5.10 дают достаточные условия существования статической обратной связи по состоянию, решающей задачу синтеза робастного анизотропийного регулятора для систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. В отличие от теоремы 5.9 теорема 5.10 не требует поиска взаимнообратных матриц. При этом число неизвестных переменных увеличивается на $\frac{n(n-1)}{2}$.

Рассмотренные выше теоремы получены в предположении о том, что $D_{zu} = 0$, а также что $p_1 \leq m$. Несмотря на то, что полученные выше результаты позволяют синтезировать менее консервативные регуляторы, указанные предположения существенно ограничивают область применения данных условий синтеза. Ниже рассмотрим решение задачи 5.4 с использованием теоремы 5.8, которые обходят ограничения на D_{zu} и отношение размерностей p_1 и m . Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.11. *Для заданных значений $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ задача 5.4 разрешима, если существуют числа $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$ -матрица $Y > 0$, $(m \times m)$ -матрица $\Psi > 0$ и $(m_1 \times n)$ -матрица Λ такие, что выполнены неравенства*

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.110)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_1 M_1 M_1^T & N_1^T \\ N_1 & -\varepsilon_1 I_{2s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.111)$$

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_2 M_2 M_2^T & N_2^T \\ N_2 & -\varepsilon_2 I_{4s} \end{bmatrix} < 0. \quad (5.112)$$

Здесь

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & B_w^T & D_{zw}^T \\ B_w & -Y & 0 \\ D_{zw} & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_B & 0 \\ 0 & M_D \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Y & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ AY + B_u \Lambda & B_w & -Y & * \\ C_z Y + D_{zu} \Lambda & D_{zw} & 0 & -I_p \end{bmatrix}, \quad (5.113)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & M_D \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} N_A Y & 0 & 0 & 0 \\ N_C Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.114)$$

Параметры регулятора определяются по формуле:

$$F = \Lambda Y^{-1}.$$

Доказательство. Учитывая, что D_{zu} может быть ненулевой, выражения для замкнутой системы примут вид:

$$x(k+1) = (A^\Delta + B_u F) x(k) + B_w^\Delta w(k), \quad (5.115)$$

$$z(k) = (C_z^\Delta + D_{zu} F) x(k) + D_{zw}^\Delta w(k). \quad (5.116)$$

Теорема легко доказывается прямой подстановкой матриц замкнутой системы (5.115)–(5.116) в условия теоремы 5.8 с учетом обозначения $\Lambda = FY$. ■

5.2.4. Синтез статического робастного регулятора по выходу

Система (5.88), (5.90), замкнутая управлением (5.92), имеет представление в пространстве состояний:

$$x(k+1) = (A^\Delta + B_u K C_y^\Delta) x(k) + (B_w^\Delta + B_u K D_{yw}^\Delta) w(k), \quad (5.117)$$

$$z(k) = (C_z^\Delta + D_{zu} K C_y^\Delta) x(k) + (D_{zw}^\Delta + D_{zu} K D_{yw}^\Delta) w(k). \quad (5.118)$$

Решение задачи 5.5 дается в теореме 5.12.

Теорема 5.12. Для заданных значений $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ задача 5.5 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$ -матрица $\Phi = \Phi^T > 0$, $(n \times n)$ -матрица $\Pi = \Pi^T > 0$, $(m \times m)$ -матрица $\Psi = \Psi^T > 0$ и $(m_1 \times p_1)$ -матрица K такие, что выполнены следующие неравенства:

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_1 N_1^T N_1 & M_1 \\ M_1^T & -\varepsilon_1 I_{6s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.119)$$

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.120)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U} + \varepsilon_2 N_2^T N_2 & M_2 \\ M_2^T & -\varepsilon_2 I_{3s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.121)$$

причем

$$\Phi \Pi = I_n. \quad (5.122)$$

Здесь

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & B_u K M_{C_y} & 0 & M_B & B_u K M_{D_y} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{C_y} & M_C & 0 & D_{zu} K M_{D_y} & M_D \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \\ N_{C_y} & 0 & 0 & 0 \\ N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_{D_y} & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{U} = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & * & * \\ B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_{Dy} & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Достаточные условия для построения статического регулятора по выходу получаются напрямую, если записать условия леммы 1.5 для системы (5.117)–(5.118). Все преобразования матричных неравенств аналогичны преобразованиям из подраздела 5.2.3 и не требуют повторения.

Замечание 5.4. *Регулятор, доставляющий минимум анизотропийной норме, может быть найден с использованием следующей оптимизационной процедуры. Заменяем $\xi = \gamma^2$ и решим следующую оптимизационную задачу: найти $\xi_* = \min \xi$ на множестве $\{\eta, \xi, \Phi, \Pi, \Psi, Y, K, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, удовлетворяющее (5.119)–(5.121) и $\Phi\Pi = I_n$. Если минимальное значение ξ_* найдено, тогда анизотропийная норма замкнутой системы может быть приближенно вычислена:*

$$\|\mathcal{F}_{cl}^{out}\|_a \approx \sqrt{\xi_*}. \quad (5.123)$$

Аналогичные оптимизационные процедуры могут быть использованы при нахождении регуляторов на основе теорем 5.9 и 5.10.

Для численной реализации методики синтеза робастных регуляторов из теоремы 5.12, требующих поиска взаимнообратных матриц, с использованием пакетов Yalmip и SeDuMi, можно использовать алгоритм 4.1, разработанный на основе результатов из [2], описанный ранее в главе 4.

Пример 5.5. Рассмотрим систему:

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 2 \\ -0.75 & -1.00 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = 0,$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 2.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.01 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

Неопределенности в системе заданы через коэффициенты:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 & 0.75 \end{bmatrix}^T, \quad N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}^T, \quad N_B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$M_C = M_D = 0.2, \quad N_C = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_D = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.08 \end{bmatrix},$$

$$M_{C_y} = M_{D_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad N_{C_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{D_y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Номинальная система является неустойчивой. Для поиска взаимнообратных матриц был выбран алгоритм, предложенный в [2]. Точность поиска взаимнообратных матриц равна $\epsilon = 10^{-7}$.

При решении задачи синтеза была минимизирована анизотропийная норма замкнутой системы для заданного уровня средней анизотропии a . После того как решение было найдено, проводился анализ замкнутой системы. Так как неопределенность в данном примере является скалярной величиной, то был использован метод оценки анизотропийной нормы из [31] на сетке с шагом $h = 0.01$ на отрезке $\Delta \in [-1; 1]$. Наибольшее значение нормы принималось в качестве худшего случая. Результаты численных экспериментов сведены в таблицу.

Как видно из полученных результатов, управление в виде статической обратной связи по состоянию дает наилучший результат. При этом анизотропийная норма замкнутой системы с регулятором, полученным из условий

Таблица 5.6. Результаты численных экспериментов

Средняя анизотропия a	0.1	0.5	1	3	100
$\ \mathcal{F}_{cl}\ _a$ на основе теоремы 5.9	1.0535	1.5464	1.8435	2.1973	2.2472
$\ \mathcal{F}_{cl}\ _a$ на основе теоремы 5.10	1.0489	1.5379	1.8435	2.1978	2.2494
$\ \mathcal{F}_{cl}\ _a$ на основе теоремы 5.11	1.2382	1.6648	1.9192	2.2079	2.2494
$\ \mathcal{F}_{cl}\ _a$ на основе теоремы 5.12	3.3980	5.0720	5.8894	6.6922	6.7993

теоремы 5.9, дает практически такой же результат, как и с использованием теоремы 5.10, а вычислительные затраты при использовании теоремы 5.10 значительно меньше.

5.2.5. Синтез динамического регулятора заданного порядка по выходу

Для решения задачи синтеза робастного анизотропийного динамического регулятора по выходу, рассмотрим линейный динамический регулятор вида

$$\xi(k+1) = A_\xi \xi(k) + B_\xi y(k), \quad (5.124)$$

$$u(k) = C_\xi \xi(k) + D_\xi y(k), \quad (5.125)$$

где $\xi(k) \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$ — состояние регулятора, а постоянные матрицы A_ξ , B_ξ , C_ξ , D_ξ подлежат определению.

С учетом (5.124)–(5.125) матрицы замкнутой системы примут вид:

$$\mathcal{A}^\Delta = \begin{bmatrix} A^\Delta + B_u D_\xi C_y^\Delta & B_u C_\xi \\ B_\xi C_y^\Delta & A_\xi \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}^\Delta = \begin{bmatrix} B_w^\Delta + B_u D_\xi D_{yw}^\Delta \\ B_\xi D_{yw}^\Delta \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}^\Delta = \begin{bmatrix} C_z^\Delta + D_{zu} D_\xi C_y^\Delta & D_{zu} C_\xi \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}^\Delta = D_{zw}^\Delta + D_{zu} D_\xi D_{yw}^\Delta.$$

Для поиска условий существования робастного регулятора, полученные выражения для замкнутой системы необходимо подставить в матричные неравенства (1.53) и (1.54), определяемые леммой 1.5. Для неравенства (1.54) имеем:

$$\begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ \mathcal{A}^\Delta & \mathcal{B}^\Delta & -Y & * \\ \mathcal{C}^\Delta & \mathcal{D}^\Delta & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.126)$$

Для неравенства (1.53) имеем:

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & * & * \\ \mathcal{B}^\Delta & -Y & * \\ \mathcal{D}^\Delta & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0, \quad (5.127)$$

Матрицы замкнутой системы можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\Delta &= \mathcal{A} + M_A \Delta N_A = \\ &= \begin{bmatrix} A + B_u D_\xi C_y & B_u C_\xi \\ B_\xi C_y & A_\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_A & B_u D_\xi M_C & 0 \\ 0 & B_\xi M_C & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} N_A & 0 \\ N_C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\Delta &= \mathcal{B} + M_B \Delta N_B = \\ &= \begin{bmatrix} B_w + B_u D_\xi D_{yw} \\ B_\xi D_{yw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_B & B_u D_\xi M_{D_y} \\ 0 & B_\xi M_{D_y} \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} N_B \\ N_{D_y} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\Delta &= \mathcal{C} + M_C \Delta N_C = \\ &= \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_\xi C_y & D_{zu} C_\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_C & D_{zu} D_\xi M_{C_y} & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} N_C & 0 \\ N_{C_y} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\Delta &= \mathcal{D} + M_D \Delta N_D = \\ &= D_{zw} + D_{zu} D_\xi D_{yw} + \begin{bmatrix} M_D & D_{zu} D_\xi M_{D_y} \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} N_D \\ N_{D_y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда неравенства (5.126) и (5.127) можно преобразовать к виду (1.48). Получим данные выражения для неравенства (5.126). Имеем:

$$\mathcal{G}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} -X & & \star & \star \\ \hline 0 & & -\eta I_m & \star \\ \hline A + B_u D_\xi C_y & B_u C_\xi & B_w + B_u D_\xi D_{yw} & -Y \\ B_\xi C_y & A_\xi & B_\xi D_{yw} & \star \\ \hline C_z + D_{zu} D_\xi C_y & D_{zu} C_\xi & D_{zw} + D_{zu} D_\xi D_{yw} & 0 \\ \hline & & & -I_p \end{array} \right], \quad (5.128)$$

$$\mathcal{M}_1 = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & B_u D_\xi M_C & 0 & 0 & M_B & B_u D_\xi M_{Dy} & 0 \\ 0 & B_\xi M_C & 0 & 0 & 0 & 0 & B_\xi M_{Dy} \\ 0 & D_{zu} D_\xi M_{Cy} & M_C & 0 & 0 & D_{zu} D_\xi M_{Dy} & M_D \end{array} \right], \quad (5.129)$$

$$\mathcal{N}_1 = \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \\ N_{Cy} & 0 & 0 & 0 \\ N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_{Dy} & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.130)$$

Для неравенства (5.127) получаются следующие выражения:

$$\mathcal{G}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \Psi - \eta I_m & & \star & \star \\ \hline B_w + B_u D_\xi D_{yw} & & -Y & \star \\ B_\xi D_{yw} & & & \\ \hline D_{zw} + D_{zu} D_\xi D_{yw} & & 0 & -I_p \end{array} \right], \quad (5.131)$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_B & B_u D_\xi M_{Dy} & 0 \\ 0 & B_\xi M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} D_\xi M_{Dy} & M_D \end{bmatrix}, \quad (5.132)$$

$$\mathcal{N}_2 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_{Dy} & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.133)$$

Сформулируем теорему.

Теорема 5.13. Для заданных значений $a \geq 0$ и $\gamma > 0$ задача синтеза динамического регулятора порядка $n_\xi \leq n$ в форме (5.124)–(5.125) разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, матрицы $\Psi > 0$, $X > 0$, $Y > 0$, A_ξ , B_ξ , C_ξ , D_ξ , для которых выполнены следующие неравенства:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 + \varepsilon_1 \mathcal{N}_1^T \mathcal{N}_1 & \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_1^T & -\varepsilon_1 I_{7s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.134)$$

$$\eta - (e^{-2a} \det(\Psi))^{1/m} < \gamma^2, \quad (5.135)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_2 + \varepsilon_2 \mathcal{N}_2^T \mathcal{N}_2 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2^T & -\varepsilon_2 I_{3s} \end{bmatrix} < 0, \quad (5.136)$$

причем

$$XY = I_n. \quad (5.137)$$

Матрицы \mathcal{G}_1 , \mathcal{M}_1 , \mathcal{N}_1 , \mathcal{G}_2 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{N}_2 определяются выражениями (5.128)–(5.133) соответственно.

Доказательство. Неравенства (5.126) и (5.127) относительно замкнутой системы представимы в форме

$$\mathcal{G}_1 + \mathcal{M}_1 \Delta \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1^T \Delta \mathcal{M}_1^T < 0$$

и

$$\mathcal{G}_2 + \mathcal{M}_2 \Delta \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_2^T \Delta \mathcal{M}_2^T < 0$$

Вводя скалярные переменные $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ и применяя лемму Петерсена 1.3, а затем используя дополнение по Шуру, получаем неравенства (5.134) и (5.136) соответственно. Затем, используя условия леммы 1.5, получаем условия (5.135) и (5.137). Теорема доказана. ■

Теорема 5.13 определяет достаточные условия существования динамического анизотропийного регулятора по выходу заданного порядка. Данные условия являются невыпуклыми, а параметры регулятора находятся одновременно с проверкой их выполнения. Для поиска взаимнообратных матриц можно воспользоваться различными алгоритмами, например, алгоритмом из [2].

Пример 5.6. *Рассмотрим теперь модель линейного осциллятора - математического маятника. Модель математического маятника в пространстве состояний имеет вид:*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A^\Delta x(t) + B_u u(t) + B_w w(t), \\ y(t) &= x_1(t), \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t),\end{aligned}$$

где $\omega = 5$, $\xi = 0.5$,

$$A^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.12 & 0.2 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Исходная непрерывная модель была дискретизована с шагом $h = 10^{-3}$ с. Отметим, что исходная система является устойчивой, однако ее переходный процесс является сильно колебательным и слабо затухающим. Входное возмущение является случайной гауссовской последовательностью с уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(w) = 0.7$. Используя теорему 5.7, оценим верхнюю границу анизотропийной нормы разомкнутой системы при $a = 0.7$. В резуль-

тате анализа было получено, что анизотропийная норма разомкнутой системы с неопределенностями не превосходит числа $\|F^\Delta\|_a < 12.2957$, в то время, как анизотропийная норма номинальной системы равна $\|F_{nom}\|_a \approx 4.2475$.

Применяя теорему 5.9 и минимизируя γ , получим значения регулятора в форме обратной связи с параметрами:

$$F = \begin{bmatrix} -110.4176 & 541.4826 \end{bmatrix}.$$

А анизотропийная норма замкнутой системы не превосходит

$$\|F^{SF}\|_a < 0.5632.$$

Минимизация параметра γ с использованием условий теоремы 5.12 дает регулятор в форме статической обратной связи по выходу, равный

$$K = -1.7369,$$

а анизотропийная норма замкнутой этим регулятором системы не превосходит

$$\|F^{OUT}\|_a < 0.8645.$$

На рис. 5.16 и рис. 5.17 представлена динамика движения фазовых координат $x_1(k)$ и $x_2(k)$ математического маятника из положения $x(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ для разомкнутой системы и системы, замкнутой регуляторами F и K соответственно.

На рис. 5.18 и рис. 5.19 представлена динамика управляемых выходов $z_1(k)$ и $z_2(k)$ соответственно для разомкнутой и замкнутой систем.

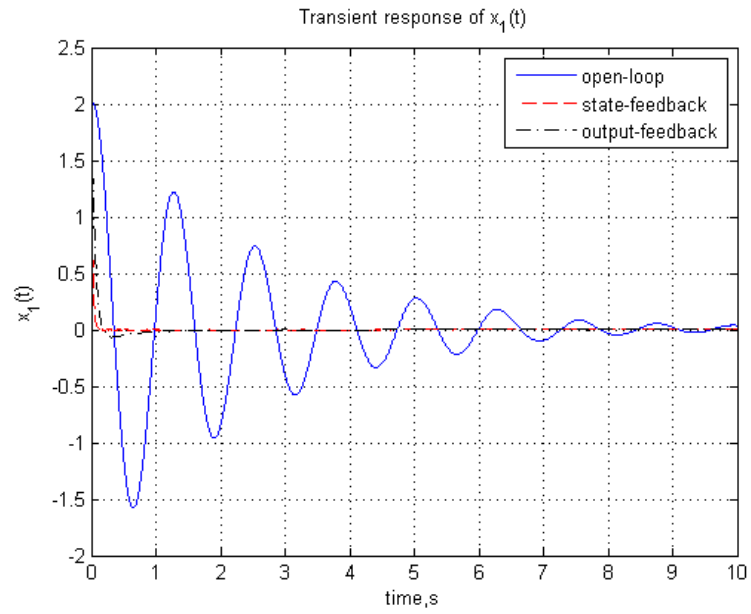


Рис. 5.16. Траектория движения координаты $x_1(k)$.

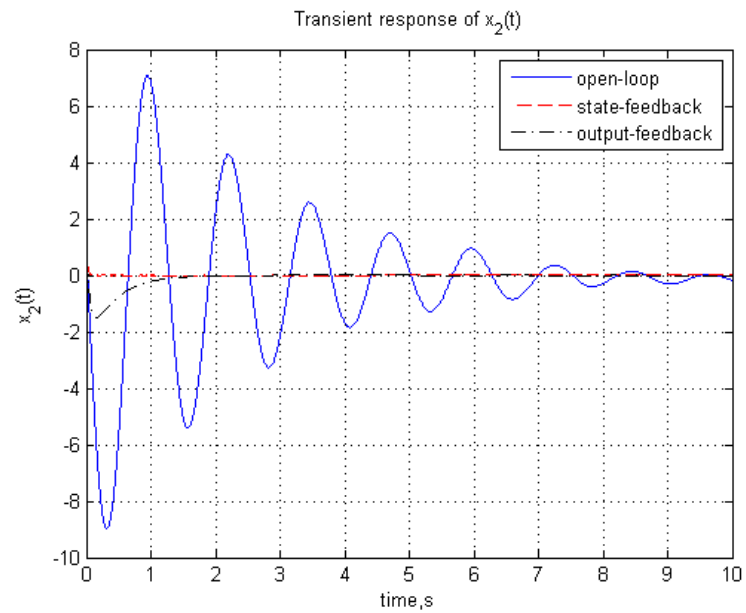


Рис. 5.17. Траектория движения координаты $x_2(k)$.

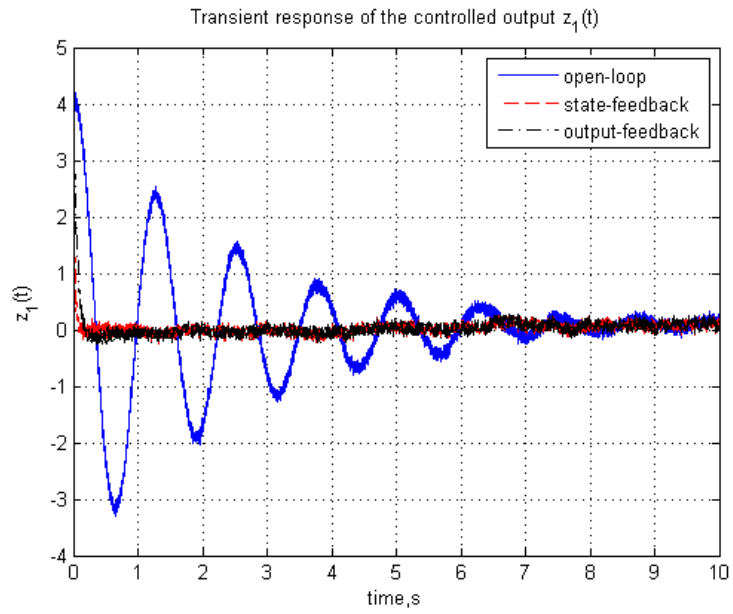


Рис. 5.18. Траектория движения управляемого выхода $z_1(k)$.

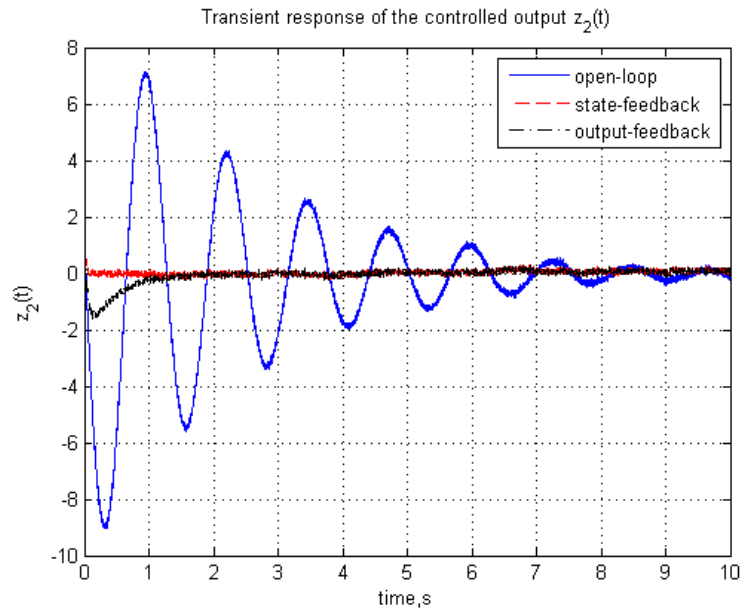


Рис. 5.19. Траектория движения управляемого выхода $z_2(k)$.

Выводы к главе 5

В данной главе были рассмотрены и решены задачи робастного анизотропного анализа и синтеза для обыкновенных систем с параметрическими неопределенностями. В качестве параметрических неопределенностей рассматривались политопические и ограниченные по норме неопределенности.

В случае политопических неопределенностей на основе параметрических функций Ляпунова были получены достаточные условия для проверки устойчивости и оценки анизотропной нормы разомкнутой системы. На основе полученных условий были разработаны методики оценки сверху анизотропной нормы системы с неопределенностью, а также решена задача синтеза робастных анизотропных регуляторов при полном измерении вектора состояния. Условия сформулированы в форме выпуклых матричных неравенств, количество которых зависит от числа вершин политопа. Также были рассмотрены дополнительные ограничения, налагаемые на динамику замкнутой системы в виде расположения полюсов замкнутой системы в заданной области внутри единичного круга. Полученные условия были применены при синтезе управления для ШИМ-инвертора с LCL фильтром. Сравнительный анализ с аналогичными результатами, полученными в рамках \mathcal{H}_∞ теории управления показали, что анизотропный регулятор обладает существенным преимуществом, т.к. позволяет повысить качество управления за счет меньших коэффициентов усиления.

Вторым важным классом систем, рассмотренным в данной главе, является класс систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Для данных систем были решены задачи анизотропного анализа и синтеза робастных анизотропных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию и по выходной переменной. Так же, как и в случае с политопическими системами, для систем с ограниченными по норме неопределенностями получены условия в форме матричных неравенств.

Заключение

В диссертационной работе в рамках решения фундаментальной проблемы теории и практики автоматического управления — понижения влияния внешних возмущений, действующих на линейные динамические системы — были разработаны и предложены новые регулярные методы анализа и синтеза в классе дискретных линейных дескрипторных систем, а также обыкновенных дискретных систем с параметрическими неопределенностями. Разработаны алгоритмы анализа и синтеза робастных систем автоматического управления с использованием аппаратов обобщенных алгебраических уравнений Риккати, а также матричных неравенств и методов выпуклой оптимизации. Кроме того, поставлены и решены задачи диагностики отказов исполнительных и измерительных элементов в дискретных системах с применением анизотропийной теории и теории дескрипторных систем.

Были получены следующие результаты.

1. Методы анизотропийного анализа и алгоритмы вычисления анизотропийной нормы дескрипторной системы с использованием техники Риккати и методов выпуклой оптимизации. В рамках теории анизотропийного управления дискретными дескрипторными системами решена задача анизотропийного анализа дискретных дескрипторных систем с точно известными параметрами. Разработано несколько подходов к вычислению анизотропийной нормы дискретной дескрипторной системы: первый подход основан на аппарате эквивалентных преобразований, второй подход применяет методы решения обобщенных алгебраических уравнений Риккати, третий

метод использует аппарат матричных неравенств и выпуклой оптимизации. Наибольшим преимуществом среди трех методов обладает последний, так как позволяет реализовать вычислительно эффективные процедуры оценки анизотропийной нормы дискретной дескрипторной системы с одновременной проверкой ее на допустимость.

2. Методы синтеза оптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния на основе обобщенных и обыкновенных алгебраических уравнений Риккати. Метод синтеза субоптимального анизотропийного регулятора при полном измерении вектора состояния для дескрипторных систем с расположением конечных полюсов замкнутой системы в заданной области. На основе полученных методик анализа дескрипторных систем разработаны регулярные методы синтеза оптимальных и субоптимальных анизотропийных регуляторов для подавления влияния случайных внешних возмущений. Были решены задачи оптимального анизотропийного управления при полном и неполном измерении вектора состояния, а также задачи субоптимального анизотропийного управления при полном измерении вектора состояния. Было показано, что решение задач анизотропийного синтеза для дескрипторных систем с одной стороны обобщает известные \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ задачи, а с другой стороны — задачи анизотропийного синтеза для обыкновенных дискретных систем. Методы на основе выпуклой оптимизации легко алгоритмизируются, являются вычислительно эффективными и позволяют налагать дополнительные ограничения на замкнутую систему в виде быстродействия и запаса устойчивости, располагая конечные полюсы замкнутой системы в заданной области внутри единичного круга.
3. Методы робастного анизотропийного анализа и алгоритм оценки верхней границы анизотропийной нормы дескрипторной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Поставлены и реше-

ны задачи робастного анизотропийного анализа для дискретных дескрипторных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. Получены регулярные методы для оценки верхней границы анизотропийной нормы системы с неопределенностями и проверки ее на робастную допустимость.

4. Методы синтеза робастного анизотропийного управления дескрипторной системой с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями при полном измерении вектора состояния. На основе полученных методов анализа были предложены алгоритмы и методы синтеза робастных анизотропийных регуляторов по состоянию, в том числе и с ограничением на область расположения конечных полюсов замкнутой системы. В рамках \mathcal{H}_∞ теории управления были получены вычислительно эффективные и неконсервативные методы оценки \mathcal{H}_∞ качества и синтеза робастного \mathcal{H}_∞ управления для параметрически неопределенных систем. Численное моделирование показало преимущества по сравнению с существующими методами \mathcal{H}_∞ анализа и синтеза.
5. Решены задачи робастного анизотропийного анализа и синтеза робастных анизотропийных регуляторов для обыкновенных дискретных параметрически неопределенных линейных систем. В качестве параметрических неопределенностей рассматривались политопические и ограниченные по норме параметрические неопределенности. Были решены задачи оценки верхней границы анизотропийного качества для подобных систем, а также задачи синтеза робастного управления при полном и неполном измерении вектора состояния. Сравнительный анализ и численное моделирование показало преимущество разработанных методов по сравнению с классическими \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ подходами к синтезу робастных систем.

Список литературы

- [1] *Баландин Д.Б., Коган М.М.* Синтез оптимального робастного \mathcal{H}_∞ -управления методами выпуклой оптимизации. // Автоматика и телемеханика, № 7, С. 88 - 98, 2004.
- [2] *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц. // Автоматика и телемеханика, No. 1. С. 82–99. 2005.
Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of Controllers on the Basis of a Solution of Linear Matrix Inequalities and a Search Algorithm for Reciprocal Matrices // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 1, P. 74–91.
- [3] *Белов А.А., Курдюков А.П.* Анизотропийная норма дескрипторной системы. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XII международного семинара, Москва, С. 46 - 48, 2010.
- [4] *Белов А.А., Курдюков А.П.* Линейные дескрипторные системы дискретного времени. М.: ИПУ РАН, 2011. – 90 с.
- [5] *Белов А.А.* Синтез анизотропийных регуляторов для дескрипторных систем. // дисс. на соискание канд. физ.-мат. наук., Москва, 2011.
- [6] *Белов А.А.* Решение задачи анизотропийного управления дескрипторной системой по выходу. // Труды 5-й Российской мультиконференции по проблемам управления, конференция «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» (УТЭОСС-2012, Санкт-

- Петербург). СПб.: ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор 2012. С. 276-279.
- [7] *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Анизотропный анализ дескрипторных систем с использованием ЛМН. // Труды 11-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2014, Арзамас). Арзамас: ИПУ РАН, 2014. С. 33-45.
- [8] *Белов А.А., Курдюков А.П.* Дескрипторные системы и задачи управления. М.: АНО "Физматлит 2015.
- [9] *Белов А.А., Андрианова О.Г., Гольдин Д.А.* Анизотропная частотная теорема для линейных дискретных систем с политопическими неопределенностями. // Труды 13-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII, Москва, 2019). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 325-329.
- [10] *Бояринцев Ю.Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2000.
- [11] *Бояринцев Ю.Е.* Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. // Ю.Е. Бояринцев, И.В. Орлова. — Новосибирск: Наука, 2006. — 124 с.
- [12] *Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В.* Блочные алгебро-дифференциальные системы и их индексы. // Изв. вузов. Матем., №6, С. 6–13, 2004.
- [13] *Бояринцев Ю.Е.* О нелинейных алгебро-дифференциальных системах (АДС), допускающих сведение к невырожденным системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Теория и численные методы решения. // Сиб. журн. вычисл. матем., 13:1, С. 15–21, 2010.
- [14] *Бурлачко И.В.* Исследование оптимального управления системами уравнений леонтьевского типа. // дис. на соискание канд. физ.-мат. наук, Челябинск, 2005.

- [15] *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем. // Доклады РАН, Т. 342, № 3, С. 583-585, 1995.
- [16] *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Стохастическая проблема \mathcal{H}_∞ -оптимизации. // Доклады РАН, Т. 343., № 5, С. 607-609, 1995.
- [17] *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Асимптотика анизотропной нормы линейных стационарных систем. // Автоматика и телемеханика, № 3. – С. 78-87, 1999.
- [18] *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Максимов Е.А., Тимин В.Н.* Анизотропная теория управления – новый подход к стохастической теории робастного управления. // Идентификация систем и задачи управления: Тезисы пленарных докладов IV международной конференции, Москва, С. 9-32, 2005.
- [19] *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале. // Автоматика и телемеханика, № 8, С. 92-111, 2006.
- [20] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
- [21] *Келлер А.В.* Численное исследование задач оптимального управления для моделей Леонтьевского типа. // дис. на соискание д. физ.-мат. наук, Челябинск, 2011.
- [22] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
- [23] *Курдюков А.П., Владимиров И.Г., Тимин В.Н.* Элементы теории робастного и стохастического робастного управления. // «Синтез регуляторов

- систем автоматического управления», Т.3: «Методы классической и современной теории автоматического управления». – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, С. 385-480, 2004.
- [24] Курдюков А.П., Максимов Е.А. Робастная устойчивость линейных дискретных систем с неопределённостью, ограниченной по анизотропийной норме. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов VIII международного семинара, Москва, С. 106-108, 2004.
- [25] Курдюков А.П., Максимов Е.А. Синтез регуляторов по критерию минимума \mathcal{H}_∞ -энтропии и анизотропийный синтез регуляторов. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов IX международного семинара, Москва, С. 142-143, 2006.
- [26] Курдюков А.П., Максимов Е.А. Решение задачи стохастической оптимизации для линейной дискретной системы с неопределённостью. // Автоматика и телемеханика. No. 8, 112–142. 2006.
- [27] Курдюков А.П., Андрианова О.Г., Белов А.А., Гольдин Д.А. Между LQG/\mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ теориями управления. // Автоматика и телемеханика. No. 3, 8–76, 2021.
Kurdyukov A.P., Andrianova O.G., Belov A.A. et al. In Between the LQG/\mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ -Control Theories. // Autom Remote Control, vol. 82, pp. 565–618, 2021.
- [28] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.:Наука, 2002. – 303 с.
- [29] Свиридюк Г. А., Брычев С. В. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа. // Изв. вузов, Математика, №8, С. 46-52, 2003.
- [30] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир. – 1989. – 656 с.

- [31] *Чайковский М.М.* Синтез субоптимального анизотропийного стохастического робастного управления методами выпуклой оптимизации. // Дисс. док-ра. техн. наук. М.: 2012.
- [32] *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.
- [33] *Шуряев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989. – 574 с.
- [34] *Ailon A.* Controllability of generalized linear time-invariant systems. // IEEE Trans. Automat. Control, V. 32, pp. 429–432, 1987.
- [35] *Ailon A.* On the design of output-feedback for finite and infinite pole assignment in singular systems with application to the control problem of constrained robots. // Circuit. Syst. Sig. Process., V. 13, pp. 525–544, 1994.
- [36] *Andrianova O., Belov A.* Anisotropy-based bounded real lemma for linear discrete-time descriptor systems. // Proceedings of the 19th International Conference on Process Control. Shtrebske Pleso, Slovakia: University of Pardubice, pp. 57–62, 2013.
- [37] *Andrianova O., Kurdyukov A., Belov A., Kustov A.* Anisotropy-based analysis for descriptor systems with nonzero-mean input signals. // Proceedings of 13th European Control Conference (ECC14). Strasbourg, France: EUCA, pp. 430–435, 2014.
- [38] *Andrianova O.G., Belov A.A., Kurduykov A.P.* Conditions of anisotropic norm boundedness for descriptor systems. // Journal of Computer and Systems Sciences International, vol. 54, No. 1, pp. 27–38, 2015.
- [39] *Andrianova O.G., Belov A.A.* A Riccati equation approach to anisotropy-based control problem for descriptor systems: state feedback and full

- information cases. // Proceedings of the European Control Conference (ECC-2015, Linz, Austria), Linz: European Control Association (EUCA), pp. 3231–3236, 2015.
- [40] *Andrianova O., Belov A.* Anisotropy-based analysis for descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties. // Proc. of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), Moscow, Russia. pp. 1–4, 2016.
- [41] *Andrianova O.G., Belov A.A.* Robust Anisotropy-Based Control for Uncertain Descriptor Systems with Transient Response Constraints. // IFAC-PapersOnLine, vol. 51, No. 32, pp. 515–520, 2018.
- [42] *Andrianova O.G., Belov A.A.* Robust performance analysis of linear discrete-time systems in presence of colored noise. // European Journal of Control, vol. 42, pp. 38–48, 2018.
- [43] *Andrianova O.G., Belov A.A.* Suboptimal anisotropy-based control for linear discrete-time systems with norm-bounded uncertainties. // Proceedings of the 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2018, Moscow), pp. 1–4, 2018.
- [44] *Andrianova O.G., Belov A.A.* Non-Iterative Solution to Robust Anisotropy-Based Analysis and Control Problems for Uncertain Descriptor Systems. // Proceedings of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019), pp. 455–460, 2019.
- [45] *Andrianova O.G., Belov A.A.* On Robust Performance Analysis of Linear Systems with Polytopic Uncertainties Affected by Random Disturbances. // Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland), pp. 1–6, 2019.
- [46] *Aplevich J.D.* Implicit Linear Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

- [47] *Aranovskiy S., Belov A.A., Ortega R., Barabanov N., Bobtsov A.A.* Parameter identification of linear time-invariant systems using dynamic regressor extension and mixing. // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 33, Iss. 6, pp. 1016–1030, 2019.
- [48] *Araujo J.M., Barros P.R., Dorea C.E.T.* Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: A case study of a hydraulic tank system. // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, v. 20, No. 4, pp. 1041–1047, 2012.
- [49] *Arov D.Z., Krein M.G.* On computing the entropy integrals and their minima in generalized extension problems. // *Act. Sci. Mat.*, vol. 45, pp. 33–50, 1983.
- [50] *Ascher U., Petzold L.* The Numerical Solution of Delay-Differential-Algebraic Equations of Retarded and Neutral Type. // *SIAM J. on Numerical Analysis*, vol. 32, pp. 1635–1657, 1995.
- [51] *Ascher U.M., Chin H., Petzold L.R., Reich S.* Stabilization of Constrained Mechanical Systems with DAEs and Invariant Manifold. Technical Report, 1993.
- [52] *Ascher U.M., Petzold L.R.* Stability of Computational Methods for Constrained Dynamics Systems. // *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 14(1), pp. 95–120, 1993.
- [53] *Ascher U.M., Petzold L.R.* Projected Collocation for Higher-Order Higher-Index Differential-Algebraic Equations. // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 43, pp. 243–259, 1992.
- [54] *Ascher U., Petzold L.* *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations.* SIAM, Philadelphia, 1998.
- [55] *Banaszuk A., Kociekki M., Lewis F.L.* Kalman decomposition for implicit

- linear systems. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 37, pp. 1509–1514, 1992.
- [56] *Barone F., Grassini R., Mendella G.* A unified approach to constrained mechanical systems as implicit differential equations. // Ann. Inst. Henri Poincar, Phys. Theor., vol. 70, pp. 515–546, 1999.
- [57] *Bauer I., Bock H.G., Leineweber D.B., Schlöder J.P.* Direct Multiple Shooting Methods for Control and Optimization of DAE in Chemical Engineering. // Scientific Computing in Chemical Engineering II, pp. 2–18, eds. Keil, Mackens, Voß, Werther. Springer, 1999.
- [58] *Bauer I., Bock H.G., Kőrkel S., Schlöder J.P.* Numerical Methods for Initial Value Problems and Derivative Generation for DAE Models with Application to Optimum Experimental Design of Chemical Processes. // Scientific Computing in Chemical Engineering II, pp. 282–289, eds. Keil, Mackens, Voß, Werther. Springer, 1999.
- [59] *Bauer I., Bock H.G., Kőrkel S., Schlöder J.P.* Numerical Methods for Optimum Experimental Design in DAE Systems. // Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 120, pp. 1–25, 2000.
- [60] *Beallena T., Vandooren P.* A numerical-method for deadbeat control of generalized state-space systems. // Systems & Control Lett., vol. 10, pp. 225–233, 1988.
- [61] *Belov A.A., Kurdyukov A.P.* Calculation of the anisotropic norm of the descriptor system. // Automat. Remote Control, vol. 71, pp. 1022–1033, 2010.
- [62] *Belov A.A.* Anisotropic controller design for descriptor systems with respect to the output variable. // Automation and Remote Control, vol. 74, No. 11, pp. 1838–1850. 2013.

- [63] *Belov A., Andrianova O.* Computation of anisotropic norm for descriptor systems using convex optimization. // Proceedings of the 19th International Conference on Process Control. Strbske Pleso, Slovakia: University of Pardubice, pp. 173–178, 2013.
- [64] *Belov A.A., Andrianova O.G.* A New Anisotropy-Based Control Design Approach for Descriptor Systems Using Convex Optimization Techniques. // IFAC-PapersOnLine, vol. 48, Iss. 11, pp. 372–377, 2015.
- [65] *Belov A.A., Andrianova O.G.* Suboptimal anisotropy-based control design for discrete-time systems with nonzero-mean input disturbances. // Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference), pp. 1–4, 2016.
- [66] *Belov A.A., Andrianova O.G.* Anisotropy-based Suboptimal State-Feedback Control Design Using Linear Matrix Inequalities. // Automation and Remote Control, vol. 77, No. 10, pp. 1741–1755, 2016.
- [67] *Belov A.A., Andrianova O.G.* On Anisotropy-Based Control Problem with Regional Pole Assignment for Descriptor Systems. // Proceedings of the 21st International Conference on Process Control (Strbske Pleso, Slovakia, 2017). Strbske Pleso, Slovakia, pp. 12–17, 2017.
- [68] *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust anisotropy-based control of linear discrete-time descriptor systems with norm-bounded uncertainties. // IFAC-PapersOnLine, vol. 50, Iss. 1, pp. 15471–15476, 2017.
- [69] *Belov A.A., Andrianova O.G.* On LMI Approach to Robust State-Feedback \mathcal{H}_∞ Control for Discrete-Time Descriptor Systems with Uncertainties in All Matrices. // IFAC-PapersOnLine, 2017. vol. 50, Iss. 1, pp. 15483–15487, 2017.
- [70] *Belov A.A., Andrianova O.G.* On Optimal Anisotropy-Based Control Problem for Discrete-Time Descriptor Systems. // Proceedings of the 26th

- Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2018, Zadar, Croatia), pp. 661–666, 2018.
- [71] *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Control of Discrete-Time Descriptor Systems. Cham: Springer International Publishing, 2018.
- [72] *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust state-feedback \mathcal{H}_∞ control for discrete-time descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties. // International Journal of Systems Science, vol. 50, No. 6, pp. 1303–1312, 2019.
- [73] *Belov A.A., Ortega R., Bobtsov A.A.* Parameter Identification of Linear Discrete-Time Systems with Guaranteed Transient Performance. // IFAC-PapersOnline, vol. 51, Iss. 15, pp. 1038–1043, 2018.
- [74] *Belov A.A., Andrianova O.G.* Sensor Fault Estimation for Discrete-Time Systems in Presence of Correlated Noise with Anisotropy-Based Quality Criterion. // Proceedings of 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2019), pp. 355–360, 2019.
- [75] *Belov A.A., Andrianova O.G.* Robust Control Design for Suppressing Random Exogenous Disturbances in Parametrically Uncertain Linear Systems. // Automation and Remote Control, vol. 81, No 4, pp. 649–661, 2020.
- [76] *Belov A.A.* State-feedback anisotropy-based robust control of linear systems with polytopic uncertainties. // Journal of Physics: Conference Series, 1536, pp. 012008 (1–8), 2020.
- [77] *Belov A.A.* Improved Fault Detection and Estimation Filter Design Using Anisotropy-Based Approach. // Proceedings of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia), pp. 638–643, 2020.
- [78] *Belov A.A.* Random Disturbance Attenuation in Discrete-time Polytopic Systems: Performance Analysis and State-Feedback Control. // Proceedings

- of the 2020 European Control Conference (ECC 20, Saint Petersburg, Russia), pp. 633–637, 2020.
- [79] *Belov A.A.* Robust pole placement and random disturbance rejection for linear polytopic systems with application to grid-connected converters. // European Journal of Control, vol. 63, pp. 116–125, 2022.
- [80] *Bender D.J.* Lyapunov-like equations and reachability observability gramians for descriptor systems. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 32, pp. 343–348, 1987.
- [81] *Bender D.J., Laub A.J.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor system. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 32, pp. 672–687, 1987.
- [82] *Bernhard H.-P.* A tight upper bound on the gain of linear and nonlinear predictors for stationary stochastic processes. // IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 46, No 11, pp. 2909–2917, 1998.
- [83] *Bernstein D.S.* Matrix mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory. Princeton University Press, New Jersey, 2005.
- [84] *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQG control with an \mathcal{H}_∞ performance bound: a Riccati equation approach. // IEEE Trans. on Automat. Control, vol. 34, pp. 293–305, 1989.
- [85] *Biegler L.T., Damiano J.J., Blau G.E.* Nonlinear parameter estimation: a case study comparison. // AIChE Journal, vol. 32, No. 1, pp. 29–45, 1986.
- [86] *Bodestedt M., Tischendorf C.* PDAE models of integrated circuits and index analysis. // Math. Comput. Model. Dyn. Syst., vol. 13, pp. 1–17, 2007.
- [87] *Boichenko V.A., Belov A.A.* On Stochastic Gain of Linear Systems with Nonzero Initial Condition // Proceedings of the 25th Mediterranean

- Conference on Control and Automation (MED 2017, Valletta, Malta), pp. 817–821, 2017.
- [88] *Boukas H., Shi P.* \mathcal{H}_∞ control for Discrete-Time Linear Systems with Frobenius Norm-Bounded Uncertainties. // *Automatica*, vol. 35, pp. 1625–1631, 2004.
- [89] *Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1994.
- [90] *Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. SIAM, 1996.
- [91] *Bunse-Genster A., Byers R., Mehrmann V., Nichols N.K.* Feedback design for regularizing descriptor systems. // *Linear Algebra Appl.*, vol. 299, pp. 119–151, 1999.
- [92] *Bunse-Gerstner A., Mehrmann V., Nichols N.K.* Regularization of descriptor systems by derivative and proportional state feedback. // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 13, pp. 46–67, 1992.
- [93] *Bunse-Gerstner A., Mehrmann V., Nichols N.K.* Regularization of descriptor systems by output feedback. // *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, pp. 1742–1748, 1994.
- [94] *Byers R., Kunkel P., Mehrmann V.* Regularization of linear descriptor systems with variable coefficients. // *SIAM J. Control Optim.*, vol. 35, pp. 117–133, 1997.
- [95] *Byrne G.D., Ponzi P.R.* Differential-algebraic systems, their applications and solutions. // *Comput. Chem. Eng.*, vol. 12, pp. 377–382, 1988.

- [96] *Byrnes C.I., Georgiou T.T., Lindquist A.* A generalized entropy criterion for Nevanlinna–Pick interpolation with degree constraint. // IEEE Trans. on Automat. Control, vol. 46, pp. 822–839, 2001.
- [97] *Campbell S.L.* Singular Systems of Differential Equations. Pitman, 1980.
- [98] *Campbell S.L.* Singular Systems of Differential Equations II. Pitman, 1982.
- [99] *Campbell S.L.* One canonical form for higher index linear time varying singular systems. // Circ. Sys. Signal Process., vol. 2, pp. 311–326, 1983.
- [100] *Campbell S.L.* A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations. // SIAM J. Math. Anal., vol. 18, pp. 1101–1115, 1987.
- [101] *Campbell S.L.* Least squares completions for nonlinear differential algebraic equations. // Numer. Math., vol. 65, pp. 77–94, 1993.
- [102] *Campbell S.L., Gear C.W.* The index of general nonlinear DAEs. // Numer. Math., vol. 72, pp. 173–196, 1995.
- [103] *Chadli M., Darouach M.* Novel bounded real lemma for discrete-time descriptor systems: Application to \mathcal{H}_∞ control design. // Automatica, vol. 48, pp. 449–453, 2012.
- [104] *Chadli M., Darouach M.* Further Enhancement on Robust \mathcal{H}_∞ Control Design for Discrete-Time Singular Systems. // IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 59, No. 2, pp 494–499, 2014.
- [105] *Chang X.-H.* Robust Output Feedback H-infinity Control and Filtering for Uncertain Linear Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [106] *Chu D.L., Chan H.C., Ho D.W.C.* Regularization of singular systems by derivative and proportional output feedback. // SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 19, pp. 21–38, 1998.

- [107] *Chuand D.L., Ho D.W.C.* Necessary and sufficient conditions for the output feedback regularization of descriptor systems. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 44, pp. 405–412, 1999.
- [108] *Cobb J.D.* Feedback and pole placement in descriptor variable systems. // Int. J. Control, vol. 33, No. 6, pp. 1135–1146, 1981.
- [109] *Cobb J.D.* On the solutions of linear differential equations with singular coefficients. // J. Diff. Eq., vol. 46, No. 3, pp. 310–323, 1982.
- [110] *Cobb J.D.* Descriptor variable systems and optimal state regulation. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 28, No. 5, pp. 601–611, 1983.
- [111] *Cobb J.D.* A further interpretation of inconsistent initial conditions in descriptor variable systems. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 28, No. 9, pp. 920–922, 1983.
- [112] *Cobb J.D.* Controllability, observability and duality in singular systems. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 29, No. 12, pp. 1076–1082, 1984.
- [113] *Conte G., Perdon A.* Generalized state-space realizations of non-proper rational transfer-functions. // Systems & Control Lett., vol. 1, pp. 270–276, 1982.
- [114] *Cover T.M., Thomas J.A.* Elements of information theory. New York: Wiley, 1991.
- [115] *Daafouz J., Bernussou J.* Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. // Systems & Control Letters, vol. 43, No. 5, pp. 355–359, 2001.
- [116] *Dai L.* Singular Control Systems. Lecture notes in control and information sciences. Berlin:Springer-Verlag, 1989.

- [117] *Dai L.* Observers for discrete singular systems. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 33, pp. 187–191, 1988.
- [118] *Dai L.* Filtering and LQG problems for discrete-time stochastic singular systems. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 34, pp. 1105–1108, 1989.
- [119] *Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time-Invariant Control Systems. // Int. J. Control, vol. 74, No. 1, pp. 28–42, 2001.
- [120] *Diamond P., Kurdjukov A., Semyonov A., Vladimirov I.* Homotopy methods and anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization of control systems. // Report 97-14, The University of Queensland, Australia, pp. 1–22, 1997.
- [121] *Dirac P.A.M.* Generalized Hamiltonian dynamics. // Can. J. Math., vol. 2, pp. 129–148, 1950.
- [122] *Dirac P.A.M.* Generalized Hamiltonian dynamics. // Proc. Royal Soc. London, vol. 246, pp. 326–332, 1958.
- [123] *Dirac P.A.M.* Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva University, 1964; Dover, 2001.
- [124] *Doyle J.C.* Guaranteed margins for LQG regulators. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 23, pp. 756–757, 1978.
- [125] *Doyle J.C.* Lecture Notes in Advances in Multivariable Control. ONR/Honeywell Workshop, Minneapolis, 1984.
- [126] *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ -control problems. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 34, pp. 831–848, 1989.

- [127] *Doyle J., Zhou K., Gover K., Bodenheimer B.* Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance objectives II: Optimal control. // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 39, pp. 1575–1587, 1994.
- [128] *Duan G.-R.* Analysis and Design of Descriptor Linear Systems. Advances in Mechanics and Mathematics, vol. 23, Springer, 2010.
- [129] *Dziurla B., Newcomb R.* The Drazin inverse and semi-state equations. // Proc. Intl. Symp. Math. Theory of Networks and Systems, pp. 283–289, 1979.
- [130] *Fang C.-H., Chang F.-R.* A strongly observable and controllable realization of descriptor systems. // Control Theory Adv. Tech., vol. 6, pp. 133–141, 1990.
- [131] *Fang C.-H., Lee L., Chang F.-R.* Robust control analysis and design for discrete-time singular systems. // Automatica, vol. 30, pp. 1741–1750, 1994.
- [132] *Feng Yu., Yagoubi M.* On state feedback \mathcal{H}_∞ control for discrete-time singular systems // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 58, No. 10, pp. 2674–2679, 2013.
- [133] *Feng Yu., Yagoubi M.* Robust Control of Linear Descriptor Systems. Studies in Systems, Decision and Control. Vol. 102, Springer, 2017.
- [134] *Francis B.A.* A course in \mathcal{H}_∞ -control theory. Lecture notes in control and information sciences. vol. 88, New York: Springer-Verlag, 1987.
- [135] *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ -control. // Int. J. Robust & Nonlinear Control, vol. 4, pp. 421–448, 1994.
- [136] *Gahinet P., Apkarian P., Chilali M.* Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty // IEEE Trans. Automatic Control, vol. 41, No. 3, pp. 436–442, 1996.

- [137] *Gao L., Chen W.* On D -admissibility Conditions of Singular Systems // International Journal of Control, Automation, and Systems, vol. 5, No. 1, pp. 86–92, 2007.
- [138] *Gear C.W.* The simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. // IEEE Trans. Circuit Theory, vol. 18, pp. 89–95, 1971.
- [139] *Gear C.W., Petzold L.R.* ODE methods for the solution of differential/algebraic systems. // SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 21, pp. 716–728, 1984.
- [140] *Gèradin M., Carona A.* Flexible Multibody Dynamics: A Finite Element Approach. John Wiley & Sons, 2001.
- [141] *Geerts T.* Solvability conditions, consistency, and weak consistency for linear differential-algebraic equations and time-invariant singular systems: The general case. // Linear Algebra Appl., vol. 181, pp. 111–130, 1993.
- [142] *Geerts T.* Stability concepts for general continuous-time implicit systems — definitions, Hautus tests and Lyapunov criteria. // Int. J. Systems Sci., vol. 26, pp. 481–498, 1995.
- [143] *Genin Y., Van Dooren P., Vermaut V.* Convergence of the calculation of \mathcal{H}_∞ -norms and related questions. // In Proceedings MTNS98 (Padova, Italy, July 6-10, 1998), pp. 429–432, 1998.
- [144] *Goodwin M.S., Fletcher L.R.* Exact pole assignment with regularity by output feedback in descriptor systems. I. // Int. J. Control, vol. 62, pp. 379–411, 1995.
- [145] *Goodwin M.S.* Exact pole assignment with regularity by output feedback in descriptor systems. II. // Int. J. Control, vol. 62, pp. 413–441, 1995.
- [146] *Glusingluerssen H.* Feedback canonical form for singular systems. // Int. J. Control, vol. 52, pp. 347–376, 1990.

- [147] *Glusingsluerssen H., Hinrichsen D.* A Jordan control canonical form for singular systems. // Int.J.Control, vol. 48, pp. 1769–1785, 1988.
- [148] *Gray R.* Entropy and Information theory. New York: Springer, 1990.
- [149] *Gràcia X., Pons J.M.* Constrained systems: A unified geometric approach. // Intl. J. Theor. Phys., vol. 30, pp. 511–516, 1991.
- [150] *Gràcia X., Pons J.M.* A generalized geometric framework for constrained systems. // Diff. Geom. Appl., vol. 2, pp. 223–247, 1992.
- [151] *Griepentrog E., März R.* Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment. Teubner, Leipzig, 1986.
- [152] *Griepentrog E., März R.* Basic properties of some differential-algebraic equations. // Z. Anal. Anwendungen, vol. 8, pp. 25–40, 1989.
- [153] *Grimm J.* Realization and canonicity for implicit systems. // SIAM J. Control Optim., vol. 26, pp. 1331–1347, 1988.
- [154] *Gu D.-W., Tsai M.C., O’Young S.D., Postlethwaite I.* State-space formulae for discrete-time \mathcal{H}_∞ -optimization. // Int. J. Control, vol. 49, pp. 1683–1723, 1989.
- [155] *Hairer E., Lubich C., Roche M.* The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods. Lect. Notes Maths., vol. 1409, Springer-Verlag, 1989.
- [156] *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, 1996.
- [157] *Hayton G., Fretwell P., Pugh A.* Fundamental equivalence of generalized state-space systems. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 31, pp. 431–439, 1986.

- [158] *Hemami H., Wyman B. F.* Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 24, pp. 526–535, 1979.
- [159] *Hsiung K.-L., Lee L.* Lyapunov inequality and bounded real lemma for discrete-time descriptor systems. // IEE Proc. Control Theory Appl., vol. 1, No. 46, pp. 327–331, 1999.
- [160] *Ishihara J.Y., Terra M.H.* A new Lyapunov equation for discrete-time descriptor systems. // Proc. of American Control Conf., Denver, pp. 5078–5082, 2003.
- [161] *Ishihara J.Y., Terra M.H., Sales R.M.* The full information and state feedback \mathcal{H}_2 optimal controllers for descriptor systems. // Automatica, vol. 39, pp. 391–402, 2003.
- [162] *Iureva R.A., Belov A.A., Margun A.A., Kremlev A.S.* Electric Drive Attack Detection Based on State Observers. // Proceedings of the 20th International Carpathian Control Conference (ICCC 2019, Krakow-Wieliczka, Poland), pp. 1–5, 2019.
- [163] *Ji X., Su H., Chu J.* Robust state feedback \mathcal{H}_∞ control for uncertain linear discrete singular systems. // IET Control Theory and Applications, vol. 1, No. 1, pp. 195–200, 2007.
- [164] *Katayama T., Onuki Y.* Generalized Riccati Equation and Spectral Factorization for Discrete-Time Descriptor System. // IFAC Proceedings Volumes, vol. 25, Iss. 21, pp. 56–59, 1992.
- [165] *Katayama T.* (J,J’)-spectral factorization and conjugation for discrete-time descriptor systems. // Circuits, systems, and signal processing, vol. 15, No. 5, pp. 649–669, 1996.

- [166] *Kawamoto A., Katayama T.* Standard \mathcal{H}_∞ Control Problem for Descriptor System. // Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control, San Diego, California, pp. 4130–4133, 1997.
- [167] *Kronecker L.* Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen. // Sitzungsberichte Akad. Wiss. Berlin, pp. 1225–1237, 1890; Leopold Kronecker's Werke, Chelsea, pp. 139–155, 1968.
- [168] *Kumar A., Daoutidis P.* Feedback control of nonlinear differential-algebraic equation systems. // AIChE Journal, vol. 41, pp. 619–636, 1995.
- [169] *Kunkel P., Mehrmann V.* Canonical forms for linear differential- algebraic equations with variable coefficients. // J. Comput. Appl. Math., vol. 56, pp. 225–251, 1994.
- [170] *Kunkel P., Mehrmann V.* Local and global invariants of linear differential-algebraic equations and their relation. // E. Trans. Numerical Analysis, vol. 4, pp. 138–157, 1996.
- [171] *Kunkel P., Mehrmann V.* The linear quadratic optimal control problem for linear descriptor systems with variable coefficients. // Maths. Contr. Sig. Sys., vol. 10, pp. 247–264, 1997.
- [172] *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. EMS, 2006.
- [173] *Kurdyukov A.P., Maximov E.A.* State-space solution to stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem with uncertainty. // IFAC Proceedings Volumes, vol. 38, Issue 1, pp. 429–434, 2005.
- [174] *Kurdyukov A., Maximov E., Tchaikovsky M.* Anisotropy-based bounded real lemma. // Proc. 19th Int. Symp. of Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapest, Hungary, pp. 2391–2397, 2010.

- [175] *Kurdyukov A.P., Pavlov B.V., Timin V.N.* Longitudinal Anisotropy-Based Flight Control in a Wind Shear. // Preprints of 16-th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace. Saint-Petersburg, vol. 1, pp. 430–434, 2004.
- [176] *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear optimal control systems. New York: Wiley, 1972.
- [177] *Lai C.-T., Fang C.-H., Kau S.-W., Lee C.-H.* Robust \mathcal{H}_2 control of Norm-Bounded Uncertain Continuous-Time System — an LMI Approach. // Proc. 2004 IEEE Int. Sympos. on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan, pp. 243–248, 2004.
- [178] *Lebretrand G., Loiseau J.J.* Proportional and proportional-derivative canonical-forms for descriptor systems with outputs. // Automatica, vol. 30, pp. 847–864, 1994.
- [179] *Lee L., Chen J.L.* Strictly positive real lemma and absolute stability for discrete-time descriptor systems. // IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 50, pp. 788–794, 2003.
- [180] *Leimkuhler B., Reich S.* Simulating Hamiltonian Dynamics. Cambridge University Press, 2004.
- [181] *Lewis F.L.* Descriptor systems: Decomposition into forward and backward subsystems. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 29, pp. 167–170, 1984.
- [182] *Lewis F.L.* Fundamental, reachability, and observability matrices for discrete descriptor systems. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 30, pp. 502–505, 1985.
- [183] *Lewis F.L.* A survey of linear singular systems. // Circuits, Syst. Signal Processing, vol. 5, pp. 3–36, 1986.

- [184] *Lu L., Yang R., Xie L.* Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control of Discrete-time Systems with Polytopic Uncertainties via Dynamic Output Feedback. // Proc. 2005 American Control Conference, Portland, OR, USA, pp. 4315–4320, 2005.
- [185] *Lötstedt P., Petzold L.* Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations with Algebraic Constraints I: Convergence Results for Backward Differentiation Formulas. // Mathematics of Computation, vol. 46, No. 174, pp. 491–516, 1986.
- [186] *Luenberger D.G.* Optimization by Vector Space Methods. New York: Wiley, 1969.
- [187] *Luenberger D.G., Arbel A.* Singular dynamic Leontief systems. // Econometrica, vol. 45, pp. 991–995, 1977.
- [188] *Luenberger D.G.* Dynamic equations in descriptor form. // IEEE Trans. Automat. Control, V. 22, pp. 312–321, 1977.
- [189] *Luenberger D.G.* Time-invariant descriptor systems. // Automatica, vol. 14, pp. 473–480, 1978.
- [190] *Maccari L.A. Jr, Massing J.R., Schuch L., Rech C., Pinheiro H., Montagner V.F., Oliveira R.C.L.F.* Robust \mathcal{H}_∞ control for grid connected PWM inverters with LCL filters. // Proc. 10th IEEE / IAS Int. Conf. Ind. Appl., Fortaleza, CE, Brazil, pp. 1–6, 2012.
- [191] *McFarlane D.C., Glover K.* Robust controller design using normalized coprime factor plant description. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [192] *Marszalek W.* Analysis of Partial Differential Algebraic Equations, PhD Thesis, North Carolina State University, 1997.
- [193] *März R.* A matrix chain for analyzing differential algebraic equations. Preprint 162, Inst. Math., Humboldt University, Berlin, 1987.

- [194] *Masubuchi I., Kamitane Y., Ohara A., Suda N.* \mathcal{H}_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach. // *Automatica*, vol. 33, No. 4, pp. 669–673, 1997.
- [195] *McFarlane D., Glover K.* A Loop-Shaping Design Procedure Using \mathcal{H}_∞ synthesis // *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, No. 6, pp. 759–769, 1992.
- [196] *Mendella G., Marmo G., Tulczyjew W.M.* Integrability of implicit differential equations. // *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 28, pp. 149–163, 1995.
- [197] *Mills J.K., Goldenberg A.A.* Force and position control of manipulators during constrained motion tasks. // *IEEE Trans. Robot. Automat.*, vol. 5, pp. 30–46, 1989.
- [198] *Minamide N., Fujisaki Y., Shimizu A.* A parametrization of all observers for descriptor systems. // *Int. J. Control*, vol. 66, pp. 767–777, 1997.
- [199] *Montagner V.F., Leite V.J.S., Peres P.L.D.* Discrete-time switched systems: pole location and structural constrained control // *Proc. 42nd IEEE International Conference on Decision and Control, Maui, HI*, vol. 6, pp. 6242–6247, 2003.
- [200] *Mustafa D., Glover K.* Lecture notes in control and information sciences: Minimum entropy control. Springer-Verlag: New York, 1990.
- [201] *Mustafa D., Glover K., Limebeer D.J.N.* Solutions to the \mathcal{H}_∞ general distance problem which minimize an entropy integral. // *Automatica*, vol. 27., No. 1, pp. 193–199, 1991.
- [202] *Newcomb R.W.* The semistate description of nonlinear time-variable circuits. // *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 2, No. 8, pp. 62–71, 1981.

- [203] *Newcomb R.W., Dziurla B.* Some circuits and systems applications of semistate theory. // *Circuit. Syst. Sig. Process.*, vol. 8, pp. 235–260, 1989.
- [204] *de Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A new discrete-time robust stability condition. // *Systems & Control Letters*, vol. 37, No. 4, pp. 261–265, 1999.
- [205] *Oliveira R.C.L.F., Peres P.L.D.* A convex optimization procedure to compute \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ norms for uncertain linear systems in polytopic domains // *Optim. Control Appl. Meth.*, vol. 29, pp. 295–312, 2008.
- [206] *Pandolfi L.* Controllability and stabilization for linear systems of algebraic and differential equations. // *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 30, pp. 601–620, 1980.
- [207] *Pandolfi L.* On the regulator problem for linear degenerate control systems. // *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 33, pp. 241–254, 1981.
- [208] *Paraskevopoulos P.N., Koumboulis F.N.* Unifying approach to observers for regular and singular systems. // *IEEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 138, pp. 561–572, 1991.
- [209] *Paraskevopoulos P.N., Koumboulis F.N.* Observers for singular systems. // *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 37, pp. 1211–1215, 1992.
- [210] *Peaucelle D., Arzelier D., Bachelier O., Bernussou J.* A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. // *Syst. Control Lett.*, vol. 40, pp. 21–30, 2000.
- [211] *Peaucelle D., Arzelier D.* Robust performance analysis with LMI-based methods for real parametric uncertainty via parameter-dependent Lyapunov functions. // *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 46, pp. 624–630, 2001.
- [212] *Peaucelle D., Ebihara Y.* LMI results for robust control design of observer-based controllers, the discrete-time case with polytopic uncertainties. //

- Proc. of the 19th World Congress The International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa, pp. 6527–6532, 2014.
- [213] *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems & Control Lett., vol. 8, pp. 351–357, 1987.
- [214] *Petzold L.R.* Differential/Algebraic equations are not ODE's. // SIAM J. Sci. and Stat. Comput., vol. 3, No. 3, pp. 367–384, 1982.
- [215] *Rabier P.J., Rheinboldt W.C.* A general existence and uniqueness theory for implicit differential-algebraic equations. // Differential and Integral Equations, vol. 4, pp. 563–582, 1991.
- [216] *Rabier P.J., Rheinboldt W.C.* A geometric treatment of implicit differential-algebraic equations. // J. Diff. Equations, vol. 109, pp. 110–146, 1994.
- [217] *Rabier P.J., Rheinboldt W.C.* Nonholonomic Motion of Rigid Mechanical Systems from a DAE Viewpoint. SIAM, 2000.
- [218] *Rabier P.J., Rheinboldt W.C.* Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. // Handbook of Numerical Analysis, vol. 8, pp. 183–540, 2002.
- [219] *Reich S.* On a geometrical interpretation of differential-algebraic equations. // Cir. Sys. Signal Process., vol. 9, pp. 367–382, 1990.
- [220] *Reich S.* On an existence and uniqueness theory for nonlinear differential-algebraic equations. // Cir. Sys. Signal Process., vol. 10, pp. 343–359, 1991.
- [221] *Reich S.* On the local qualitative behavior of differential-algebraic equations. // Cir. Sys. Signal Process., vol. 14, pp. 427–443, 1995.
- [222] *Reis T., Tischendorf C.* Frequency domain methods and decoupling of linear infinite dimensional differential algebraic systems. // J. Evol. Equ., vol. 5, pp. 357–385, 2005.

- [223] *Reißig G., Martinson W.S., Barton P.I.* Differential-algebraic equations of index 1 may have an arbitrarily high structural index. // SIAM J. Sci. Comput., vol. 21, pp. 1987–1990, 2000.
- [224] *Rheinboldt W.C.* Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds. // Math. Comput., vol. 43, pp. 473–482, 1984.
- [225] *Riaza R., Torres-Ramirez J.* Nonlinear circuit modeling via nodal methods. // Internat. J. Circuit Theory Appl., vol. 33, pp. 281–305, 2005.
- [226] *Riaza R.* Differential-algebraic Systems: Analytical Aspects and Circuit Applications. World Scientific, 2008.
- [227] *Rotstein H., Sznaier M.* An exact solution to general four-block discrete-time mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ problems via convex optimization. // IEEE Trans. Automat. Control, vol. 43, No. 10, pp. 1475–1481, 1998.
- [228] *Sadabadi M.S., Karimi A.* An LMI formulation of fixed-order \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 controller design for discrete-time systems with polytopic uncertainty. // 52nd IEEE Conference on Decision and Control, Florence, pp. 2453–2458, 2013.
- [229] *Safonov M., Limebeer D.J.N.* Simplifying the \mathcal{H}_∞ theory via loop shifting. // Proc. 27 Conf. on Decision Control, Texas, pp. 1399–1404, 1988.
- [230] *Sarason D.* Generalized interpolation in \mathcal{H}_∞ . // Trans. American Math. Society, vol. 127, pp. 179–203, 1967.
- [231] *Sari B., Bachelie O., Bosche J., Maamria N., Mehdi D.* Pole placement in non connected regions for descriptor models // Mathematics and Computers in Simulation, vol. 81, pp. 2617–2631, 2011.
- [232] *Schein O.* Stochastic Differential-Algebraic Equations in Circuit Simulation. Shaker Verlag, 1999.

- [233] *Scherer C., Gahinet P., Chilali M.* Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. // IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, No. 7, pp. 896–911, 1997.
- [234] *Scott B.* Power system dynamic response calculations. // Proc. IEEE, vol. 67, No. 2, pp. 219–241, 1979.
- [235] *Sebe N.* New LMI Characterizations for Discrete-Time Descriptor Systems and Application to Multiobjective Control System Synthesis. // Proc of the 17th World Congress IFAC, Seoul, Korea, pp. 8821–8827, 2008.
- [236] *Seiler W.M.* Numerical analysis of constrained Hamiltonian systems and the formal theory of differential equations. // Math. Comp. Simul., vol. 45, pp. 561–576, 1998.
- [237] *Seiler W.M.* Numerical integration of constrained Hamiltonian systems using Dirac brackets. // Math. Comp., vol. 68, pp. 661–681, 1999.
- [238] *Seiler W.M.* Involution and constrained dynamics I: the Dirac approach. // J. Phys. A: Math. Gen., vol. 28, pp. 4431–4451, 1995.
- [239] *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization. // Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Florida (USA), pp. 2249–2250, 1994.
- [240] *Shi G., Liu X.* Robust Mixed-Norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Regulation for Uncertain Discrete-Time Systems via State Feedback // IEEE TENCON'93, pp. 474–477, 1993.
- [241] *Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis K.* A unified approach to linear control design. Taylor and Francis series in Systems and Control, 1997.
- [242] *Steinbrecher A., Stykel T.* Model order reduction of nonlinear circuit equations. // Int. J. Circuit Theory Appl., vol. 41, pp. 1226–1247, 2013.

- [243] *Stengel D.N., Larson R.E., Luenberger D.G., Cline T.B.* A descriptor variable approach to modeling and optimization of large-scale systems. // Prec. Eng. Foundation Conf. on Systems En 8. for power: Organization Forms for Large-Scale Systems, vol.7, Dares, Switzzland, 1979.
- [244] *Stewart G.W., Sum J.-G.* Matrix Pertrubation Theory. Academic Press, New York, 1990
- [245] *Stevens B.L., Lewis F.L.* Aircraft Modeling. Dynamics and Control. New York: Wiley, 1991.
- [246] *Storvogel A.A.* The \mathcal{H}_∞ control problem: a state space approach. New York: Prentice-Hall, 1992.
- [247] *Stykel T.* Analysis and numerical solution of generalized Lyapunov equations. Ph.D. thesis, Institut fur Mathematik, Techische Universitat Berlin, Berlin, 2002.
- [248] *Stykel T.* Stability and inertia theorems for generalized Lyapunov equations. // Linear Algabra Appl., vol. 355 (1-3), pp. 297–314, 2002.
- [249] *Stykel T.* Input-Output Invariants for Descriptor Systems. San Francisco: Pitman, 2003.
- [250] *Stykel T.* On criteria for asymptotic stability of differential-algebraic equations. // Z. Angew. Math. Mech., vol. 82, pp. 147–158, 2002.
- [251] *Stykel T.* Gramian-based model reduction for descriptor systems. // Math. Control Signals Syst., vol. 16, pp. 297–319, 2004.
- [252] *Suplin V., Shaked U.* Robust \mathcal{H}_∞ output-feedback control of linear discrete-time system. // Systems & Control Letters, vol. 54, pp. 799–808, 2005.
- [253] *Takaba K., Katayama T.* \mathcal{H}_2 output feedback control for descriptor systems. // Systems & Control Lett., vol. 34, pp. 841–850, 1988.

- [254] *Takaba K., Morihira N., Katayama T.* A generalized Lyapunov theorem for descriptor system. // *Systems & Control Lett.*, vol. 24, pp. 49–51, 1995.
- [255] *Takaba K., Katayama T.* Discrete-time \mathcal{H}_∞ algebraic Riccati equation and parametrization of all \mathcal{H}_∞ filters. // *Int. J. Control*, vol. 64, pp. 1129–1149, 1996.
- [256] *Takaba K., Morihira N., Katayama T.* \mathcal{H}_∞ control for descriptor systems — a J-spectral factorization approach. // In Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, USA, pp. 2251–2256, 1994.
- [257] *Takens F.* Constrained equations; a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions. // *Lect. Notes Maths.*, vol. 525, pp. 143–234, Springer-Verlag, 1976.
- [258] *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Strict Anisotropic Norm Bounded Real Lemma in Terms of Matrix Inequalities. // *Doklady Math.*, vol. 48, No. 3, pp. 895–898, 2011.
- [259] *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* On upper estimate of anisotropic norm of uncertain system with application to stochastic robust control. // *International Journal of Control*, vol. 91, No. 11, pp. 2411–2421, 2018.
- [260] *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Anisotropic Suboptimal Control for Systems with Linear-Fractional Uncertainty. // *Automation and Remote Control*, vol. 79, No. 6, pp. 1100–1116, 2018.
- [261] *Tsai M.C.* On discrete spectral factorizations — a unify approach. // *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 38, pp. 1563–1567, 1993.
- [262] *Verghese G.C., Levy B.C., Kailath T.* A generalized state-space for singular systems. // *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 26, pp. 811–831, 1981.

- [263] *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy of signals and the entropy of linear stationary systems. // *Doklady Math.*, v. 51, pp. 388–390, 1995.
- [264] *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* A stochastic problem of \mathcal{H}_∞ -optimization. // *Doklady Math.*, vol. 52, No. 1, pp. 155–157, 1995.
- [265] *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V.* Asymptotics of the Anisotropic Norm of Linear Time-Independent Systems. // *Autom. Remote Control*, vol. 60, No. 3, pp. 359–366, 1999.
- [266] *Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P.* Anisotropy-based robust performance analysis of finite horizon linear discrete time varying systems. // *Automation and Remote Control*, vol. 67, No. 8, pp. 1265–1282, 2006.
- [267] *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems. // *Proc. 13th IFAC World Congress, San-Francisco*, pp. 179–184, 1996.
- [268] *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* State-space solution to anisotropy-based stochastic \mathcal{H}_∞ -optimization problem. // *Proc. 13th IFAC World Congress, San-Francisco*, pp. 427–432, 1996.
- [269] *Wang S.-Y., Gao Z.-F., He H.-K.* Observer-Based Robust \mathcal{H}_∞ control of a Class of Discrete Time Systems with State Uncertainties. // *Proc. 8th Int. Conf. on Machine Learning and Cybernetics, Baoding*, pp. 1949–1953, 2009.
- [270] *Wang H.-S., Yung C.-F., Chang F.-R.* \mathcal{H}_∞ control for nonlinear descriptor systems. London:Springer-Verlag, 2006.
- [271] *Weierstrass K.* Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. // *Monatsberichte Akad. Wiss. Berlin* 1868, pp. 310–338; *Mathematische Werke*, II, Georg Olms Verlag and Johnson Reprint Co., 1967, pp. 19–44.

- [272] *Xie L., de Souza Carlos E.* Robust \mathcal{H}_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. // IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, No. 8, pp. 1188–1191, 1992.
- [273] *Xu S., Lam J.* Robust Control and Filtering of Singular Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Berlin, Springer-Verlag, 2006.
- [274] *Yung C.-F., Wang C.-C., Wu P.-F., Wang H.-S.* Bounded real lemma for discrete-time descriptor systems. // Proc. 17th IFAC World Congress, Korea, Seoul, pp. 9982–9986, 2008.
- [275] *Yaesh I., Shaked U.* A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: \mathcal{H}_∞ -optimal linear control and filtering. // IEEE Trans. on Autom. Control, vol. 36, pp. 1264–1271, 1991.
- [276] *Yang R., Lu L., Xie L.* Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control of discrete-time systems with polytopic uncertainties via dynamic output feedback. // International Journal of Control, vol. 78, No. 16, pp. 1285–1294, 2005.
- [277] *Zames G.* Feedback Minimax Sensitivity and Optimal Robustness. // IEEE Trans. on Autom. Control, vol. 28, pp. 585–601, 1983.
- [278] *Zhang S.Y.* Pole placement for singular systems. // Systems & Control Lett., vol. 12, pp. 339–342, 1989.
- [279] *Zhang L., Lam J., Xu S.* On positive realness of descriptor systems. // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 49, No. 3, pp. 401–407, 2002.
- [280] *Zhang G., Zhang Q.L., Chen T., Lin Y.* On Lyapunov theorems for descriptor systems. // Discrete Contin. Dyn. Syst.-Ser.B, vol. 10, pp. 709–725, 2003.
- [281] *Zhang L., Lam J., Zhang Q.L.* Optimal model reduction of discrete-time descriptor systems. // Int. J. Systems Sci., vol. 32, pp. 575–583, 2001.

- [282] *Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.* Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance objectives I: Robust performance analysis. // IEEE Trans. on Automat. Control, vol. 39, pp. 1564–1574, 1994.