

***Наблюдатели состояния и  
возмущений  
с нелинейными ограниченными  
корректирующими воздействиями***

***к.т.н., с.н.с. лаб. № 37***

***Уткин Антон Викторович***

## Постановка задачи

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x, t) + b(x_1)u, \quad (4.1)$$

где  $x = \text{col}(x_1, x_2) \in R^2$  – вектор состояния;  $x_1(t) \in R$  – выходная (измеряемая) переменная;  $x_2(t)$  не измеряется,  $|x_2(0)| \leq X_2$ ;  $u \in R$  – управление; функция  $b(x_1)$  известна;  $b(x_1) \neq 0 \quad \forall x_1(t), t \geq 0$ , функция  $f(x, t)$  неизвестна,

$$|f(x, t)| \leq F, \quad |\dot{f}(x, t)| \leq F_1 \quad \forall x(t) \in X, t \geq 0, \quad (4.2)$$

Для синтеза обратной связи ставится задача оценивания:

$$x_2(t), \quad f(t)$$

по измерениям выходной переменной  $x_1(t)$ .

## Наблюдатель на скользящих режимах

$$\dot{z}_1 = z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = b(x_1)u + v_2,$$

$z_{1,2} \in R$  – переменные состояния,  $v_{1,2} \in R$  – корректирующие воздействия

**В ошибках наблюдения**  $\varepsilon_i = x_i - z_i, i = 1, 2.$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = f(t) - v_2 \quad (4.3)$$

**Цель – стабилизация (4.3)**

**Шаг 1.**  $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1, M_1 = \text{const}$

Выполнение достаточных условий:

$$\varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 (\varepsilon_2 - M_1 \text{sign} \varepsilon_1) \leq |\varepsilon_1| (|\varepsilon_2| - M_1) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1 > M_1^* = |\varepsilon_1(0)| / t_1 + \Phi_2, |\varepsilon_2(t)| \leq \Phi_2 \quad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow v_{1eq} = \varepsilon_2, \quad t \geq t_1$$

где  $v_{1eq} \approx \tau_1, \mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + v_1, \mu_1 > 0$

**Шаг 2.**  $v_2 = M_2 \text{sign} \tau_1 = M_2 \text{sign} \varepsilon_2 \quad t > t_1$

$$\varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 (f(t) - M_2 \text{sign} \varepsilon_2) \leq |\varepsilon_2| (F - M_2) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_2 > |\varepsilon_2(t_1)| / (t_2 - t_1) + F.$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = 0, \dot{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow v_{2eq} = f(t), \quad t \geq t_2 > t_1$$

где  $v_{2eq} = f(t) \approx \tau_2, \mu_2 \dot{t}_2 = -\tau_2 + v_2, \mu_2 > 0$

оценка области изменения  $\varepsilon_2(t)$ :

$$|\varepsilon_2(t)| \leq |\varepsilon_2(t_1)| < X_2 + (F + M_2)t_1 = \Phi_2 \quad \forall t \geq 0$$

Неравенства для выбора амплитуды  $M_2$ :

$$M_2 > \frac{|\varepsilon_2(t_1)|}{t_2 - t_1} + F \Rightarrow M_2 > M_2^* = \frac{X_2 + Ft_2}{t_2 - 2t_1}, \quad 0 \leq t_1 < t_2 / 2.$$

- + корректирующие воздействия ограничены
- декомпозиция задачи синтеза наблюдателя
- фильтры увеличивают порядок замкнутой системы

## Большие коэффициенты (high gains)

1)  $v_1 = l_1 \varepsilon_1 \Rightarrow l_1 \rightarrow \infty : \dot{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow v_{1eq} = l_1 \varepsilon_1 \approx \varepsilon_2,$

2)  $v_2 = l_2 (l_1 \varepsilon_1) \Rightarrow l_2 \rightarrow \infty : \dot{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow v_{2eq} = f(t)$

- + отсутствие фильтров, декомпозиция задачи синтеза
- корректирующие воздействия неограничены по модулю, большие всплески вначале переходного процесса

Sliding mode  $\Leftrightarrow$  high gains

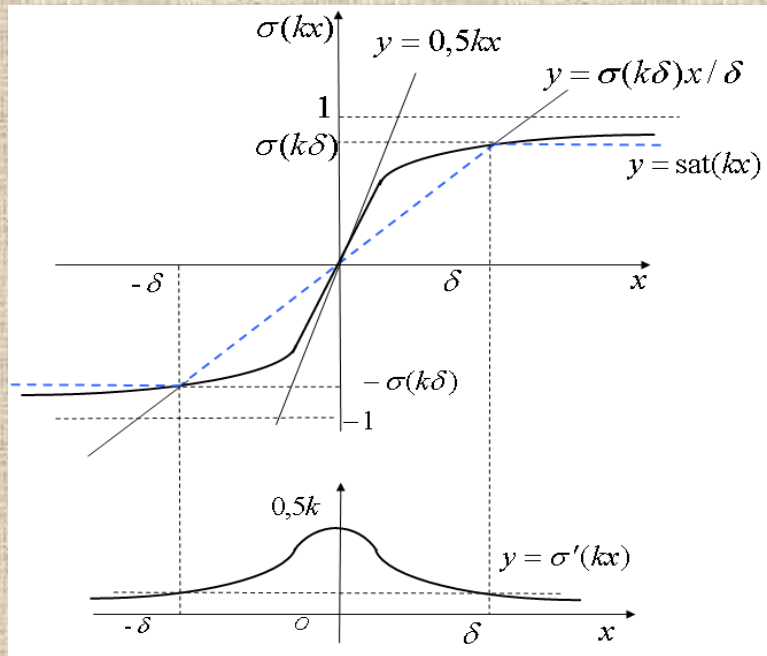
Есть альтернатива !!!

## Синтез наблюдателей состояния с сигмоидальными корректирующими воздействиями

$$\sigma(kx) = 2 / (1 + e^{-kx}) - 1, k = \text{const} > 0,$$

$$v_1 = M_1 \sigma(k_1 \varepsilon_1), v_2 = M_2 \sigma(k_2 v_1), \quad (4.4)$$

$$M_i, k_i > 0, i = 1, 2.$$



*Лемма 4.1. Если в системе (4.3), (4.4) условия (4.2) выполнены, тогда для любых сколь угодно малых  $\bar{\delta}$ ,  $T > 0$  и любых конечных начальных условий  $\varepsilon_1(0)$ ,  $|\varepsilon_2(0)| \leq X_2$  найдутся такие константы  $k_i^* > 0$ ,  $M_i^* > 0$ ,  $i = 1, 2$ , что для всех  $k_i > k_i^*$ ,  $M_i > M_i^*$  будут выполнены следующие неравенства:*

$$|\varepsilon_1(t)| \leq \bar{\delta}, |\varepsilon_2(t)| \leq \bar{\delta} \quad \forall t > T.$$

$$M_2 > M_2^* = \frac{X_2 + Ft_{20}}{(t_{20} - t_1)\sigma(c_2) - t_1}, \quad 0 \leq t_1 < \frac{t_{20}\sigma(c_2)}{1 + \sigma(c_2)}, \quad (4.5)$$

$$M_1 > M_1^* = (|\varepsilon_1(0)| / t_{10} + \Phi_2) / \sigma(c_1).$$

$$k_1 > k_1^* = \max \left\{ \frac{\ln((\Phi_2 + M_1) / \alpha)}{a_1(t_1 - t_{10})}, \frac{F + M_2}{a_1(\bar{\delta} - \delta_2 - \alpha)}, \frac{c_1}{\delta_1} \right\}.$$

$$k_2 > k_2^* = c_2 / \delta_2, \quad c_{1,2} \in [1, 3; 3]$$

**Лемма 4.2.** Если в системе (4.3), (4.4) выполнены условия (4.2), то тогда для любого, достаточно малого  $\bar{\delta} > 0$  и любых конечных начальных условий  $\varepsilon_1(0)$ ,  $|\varepsilon_2(0)| \leq X_2$  найдутся такие полож. константы  $k_i^* > 0$ ,  $M_i^* > 0$ , что при  $k_i > k_i^*$ ,  $M_i > M_i^*$  обеспечивается заданная точность оценивания  $x_2(t)$ ,  $f(t)$ , а именно:

$$|\varepsilon_{1,2}(t)| \leq \bar{\delta} \Rightarrow |x_2(t) - z_2(t)| \leq \bar{\delta}, |\dot{\varepsilon}_2(t)| \leq \bar{\delta} \Rightarrow |f(t) - v_2(t)| \leq \bar{\delta}.$$

$M_{1,2}$  : аналогичны (4.5)

$$k_2 > k_2^* = \max\{c_2 / \delta_2; F_1 / (a_2 \delta_2)\},$$

$$k_1 > k_1^* = \max\left\{\frac{\sigma(c_1)(F + M_2)^2 + a_1(F_1 + 0,5M_2k_2(F + M_2))}{a_1^2(\bar{\delta} - \delta)}, \frac{c_1}{\bar{\delta}}\right\}$$

$$a_1 = 0,5M_1(1 - \sigma^2(c_1)) > 0, c_{1,2} \in [1,3; 3]$$



## Управление асинхронным электроприводом при неполных измерениях

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= d_1(d_2 P(x_3)x_2 - d_5 x_1 + u), \quad \dot{x}_2 = -P(x_3)x_2 + d_4 x_1, \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{J}(d_2 x_2^T S^T x_1 - x_4), \quad \dot{x}_4 = f(t),\end{aligned}$$

где  $x_1 = \text{col}(x_{1\alpha}, x_{1\beta})$  – токи статора,  $x_2 = \text{col}(x_{2\alpha}, x_{2\beta})$  – потокосцепления ротора,  $x_3 \in R$  – скорость вращения,  $x_4 \in R$  – момент нагрузки,  $u = \text{col}(u_\alpha, u_\beta)$  – напряжение питания статора (управления)

$x_1(t)$  и  $x_3(t)$  - измеряются,  $f(t)$  - неизвестная функция.

**Задача слежения за заданным значением скорости вращения вала  $x_{3d}(t)$  и модуля потокосцепления  $|x_{2d}|$ .**  $e_3 = x_3 - x_{3d}$ ,  $e_2 = |x_2| - |x_{2d}|$ :

$$\dot{e}_1 = d_1(d_2 P(x_3)x_2 - d_5(e_1 + x_{1d}) + u) - \dot{x}_{1d},$$

$$\dot{e}_2 = 2(d_4 x_2^T e_1 - (d_3 + p_2)e_2), \quad \dot{e}_3 = \frac{1}{J}(d_2 x_2^T S^T e_1 - p_3 e_3),$$

Выбором истинного управления разрывным

$$u = -U \text{sign} e_1, \quad \text{sign} e_1 = \text{col}(\text{sign} e_{1\alpha}, \text{sign} e_{1\beta}).$$

- обеспечивается стабилизация  $e_1 = 0$  за конечное время
- стабилизация переменных  $e_2$  и  $e_3$  - выбором коэффициентов  $p_2, p_3 > 0$ .

$$e_1(t) = 0 \Rightarrow e_{2,3}(t) \rightarrow 0.$$

$t > t_d$   $t_d < t \rightarrow \infty$

По измерениям  $x_3(t)$  и  $x_1(t)$  требуется получить текущие оценки компонент вектора потокосцепления  $x_2(t)$  и момента нагрузки  $x_4(t)$

## Наблюдатель состояния

$$\dot{z}_1 = d_1(d_2 P(x_3) z_2 - d_5 x_1 + u) + v_1, \dot{z}_2 = -P(x_3) z_2 + d_4 x_1 + v_2, \\ \dot{z}_3 = \frac{1}{J}(d_2 z_2^T S^T x_1 - z_4) + v_3, \dot{z}_4 = v_4,$$

в ошибках наблюдения  $\varepsilon_i = x_i - z_i, i = \overline{1,4}$ :

$$1) \quad \dot{\varepsilon}_1 = d_1 d_2 P(x_3) \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = -P(x_3) \varepsilon_2 - v_2;$$

$$2) \quad \dot{\varepsilon}_3 = \frac{1}{J}(d_2 \varepsilon_2^T S^T x_1 - \varepsilon_4) - v_3, \quad \dot{\varepsilon}_4 = f(t) - v_4.$$

## Корректирующие воздействия

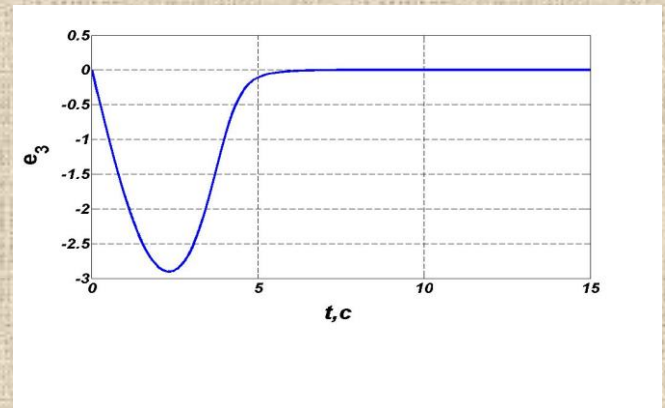
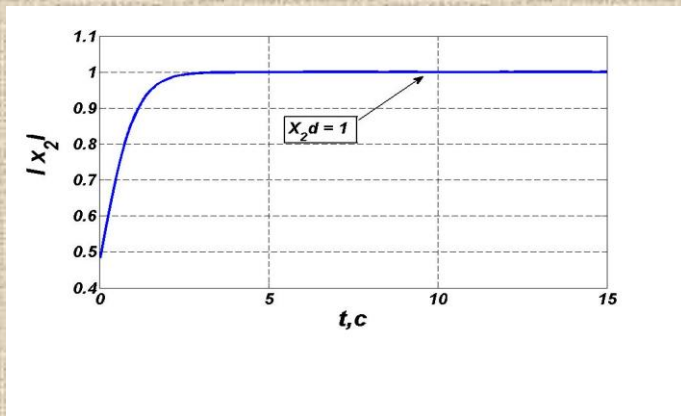
$$v_1 = M_1 \sigma(k_1 \varepsilon_1), v_2 = M_2 \sigma(k_2 v_1 / (d_1 d_2)), \sigma = \text{col}(\sigma_1, \sigma_2); \\ v_3 = M_3 \sigma(k_3 \varepsilon_3), v_4 = -M_4 \sigma(k_4 J v_3).$$

Получены соотношения на выбор коэффициентов усиления  $k_i$  и амплитуд  $M_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ), обеспечивающих заданную точность оценок  $\varepsilon_i(t)$ .

Полученные оценки используются для вычисления  $\bar{x}_{1d}(z_2, z_4, x_3)$ . Базовый закон управления реализуется в виде  $u = -U_0 \text{sign}(e_1)$  и обеспечивает выполнение поставленной задачи при  $\forall t > t_d > t_4$  с точностью, меньшей, чем  $\bar{\delta}$ .

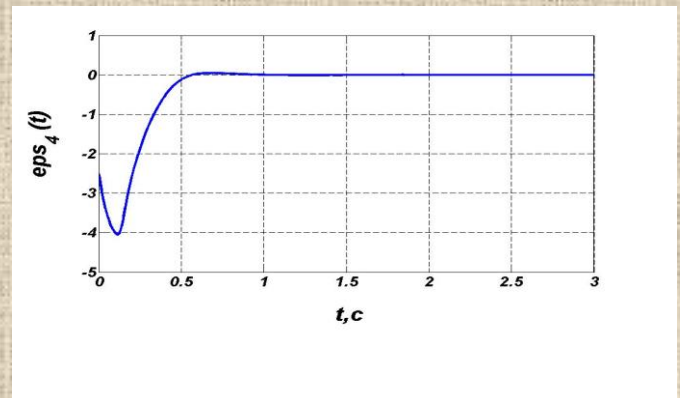
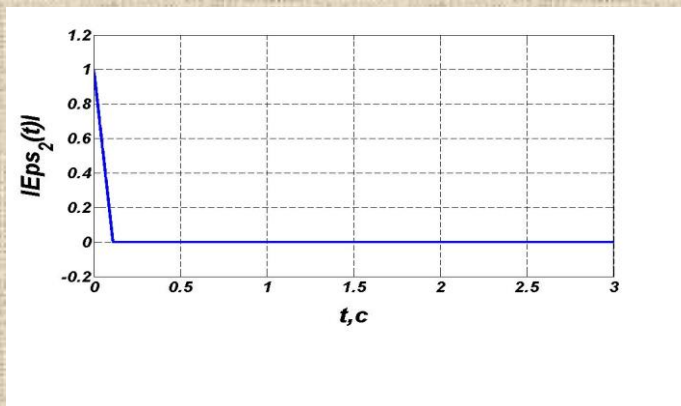
### Результаты моделирования для асинхронного электропривода

$$J = 0,06 \quad [\text{кг} \cdot \text{м}^2], \quad R_s = 0,2596, \quad R_r = 0,1484 [\text{ом}],$$
$$L_s = 0,0863, \quad L_r = 0,0871, \quad L_h = 0,0846 \quad [\text{генри}],$$
$$f(t) = 5 \sin t, \quad U = 100 [\text{В}], \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 10.$$
$$M_1 = M_3 = 300, \quad M_2 = 10, \quad M_4 = 45, \quad k_i = 20 \quad (i = \overline{1,4}).$$



Регулируемая переменная  $|x_2(t)|$

Ошибка слежения  $e_3(t)$



Ошибка наблюдения  $|\varepsilon_2(t)|$

Ошибка наблюдения  $|\varepsilon_4(t)|$

## Синтез наблюдателей состояния и возмущений с кусочно-линейными корректирующими воздействиями

$$v_i = M_i \text{sat}(l_1 \varepsilon_i),$$

$$v = M \text{sat}(l \varepsilon) = \begin{cases} M \text{sign } \varepsilon, & |\varepsilon| > \Delta; \\ l \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \Delta, \Delta = M / \alpha. \end{cases}$$

1)  $v_1 = M_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1), M_1 = \text{const} > \varepsilon_2,$

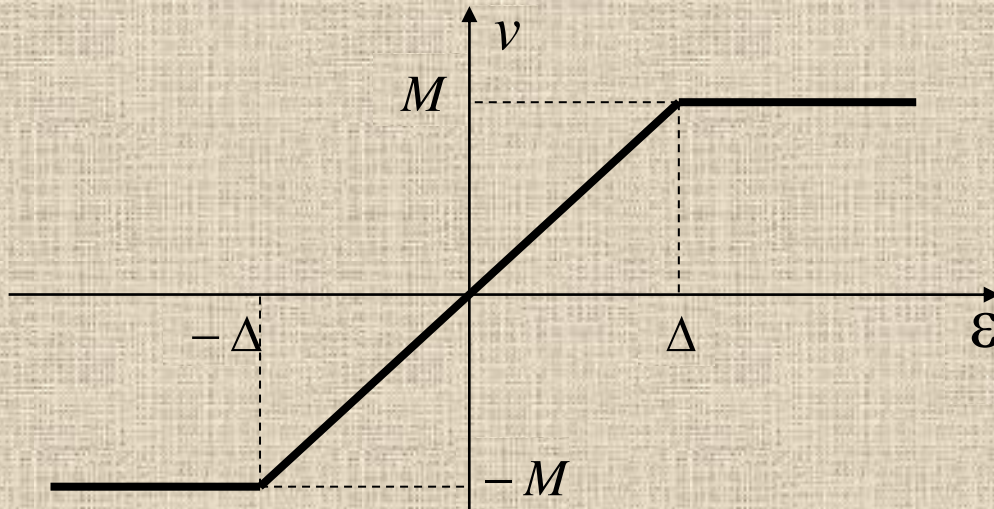
За конечное время  $\varepsilon_1$  сходится в линейную зону

$$v_1 \mid |\varepsilon_1| \leq \Delta: \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - l_1 \varepsilon_1 \quad v_1 = l_1 \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow l_1 \rightarrow \infty: \dot{\varepsilon}_1 = 0 \Rightarrow v_{1eq} = l_1 \varepsilon_1 \approx \varepsilon_2,$$

2)  $v_2 = M_2 \text{sat}(l_2 l_1 \varepsilon_1), M_2 = \text{const} > \eta_2$

$$v_2 = l_2 (l_1 \varepsilon_1) \Rightarrow l_2 \rightarrow \infty: \dot{\varepsilon}_2 = 0 \Rightarrow v_{2eq} = f_2.$$



- + корректирующие воздействия ограничены  
декомпозиция задачи синтеза наблюдателя  
упрощается анализ на выбор параметров sat-  
функций

## Аналитическое резервирование измерительных систем летательного аппарата

$$\dot{H} = V \sin \theta, \quad \dot{L} = V \cos \theta, \quad \dot{V} = (n_x - \sin \theta)g + \eta_1(t),$$

$$\dot{\theta} = \frac{(n_y - \cos \theta)g}{V} + \eta_2(t),$$

где  $H$  – высота [м];  $L$  – продольная дальность полета [м];  $V$  – путевая скорость [м/с];  $\theta$  – угол наклона траектории, [рад];  $g$  – ускорение свободного падения [м/с<sup>2</sup>];  $n_x$  и  $n_y$  – продольная и поперечная перегрузки (управления)  $\eta = \text{col}(\eta_1(t), \eta_2(t))$  – внешние возмущения (неизвестные ограниченные функции времени.

$$y_1 = \text{col}(y_{11}, y_{12}), \quad y_{11} = H, \quad y_{12} = L,$$

Замены переменных  $y_2 = \text{col}(y_{21}, y_{22}), \quad y_{21} = V \sin \theta = V_y,$

$$y_{22} = V \cos \theta = V_x, \quad V \neq 0, \quad |\theta| < \pi/2$$



Канонический вид  $\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = fg + C(\theta, V)\eta(t) + B(\theta)u,$

где  $u = \text{col}(u_1, u_2), u_1 = n_x, u_2 = n_y$

программные изменения высоты и дальности полета

$$y_{1d}(t) = \begin{pmatrix} y_{11d}(t) \\ y_{12d}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_d(t) \\ L_d(t) \end{pmatrix}$$

ошибка слежения  $e_1 = y_1 - y_{1d}, e_1 \in R^2.$

**Задача слежения**  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{1i}(t) = 0, i = 1, 2.$

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2,$$

$$\dot{e}_2 = fg + C(\theta, V)\eta + K_1(-K_1 e_1 + e_2) - \ddot{y}_{1d} + B(\theta)u.$$

**Комбинированное управление**

$$u = -B^{-1}(\theta)(K_1(e_2 - K_1 e_1) + K_2 e_2 + fg + C\eta - \ddot{y}_{1d})$$

## Наблюдатель состояния 1 $\dot{z}_0 = v_0$ ,

где  $z_0, v_0$  – вектора переменных состояния и корректирующих воздействий. Относительно ошибки наблюдения  $\dot{\varepsilon}_0 = y_2 - v_0$ .

## Наблюдатель состояния 2

$$\dot{z}_1 = -K_1 e_1 + z_2 + v_1, \dot{z}_2 = fg - K_1^2 e_1 + K_1 z_2 + B(v_0)u + v_2$$

ошибки наблюдения  $\varepsilon_i = e_i - z_i, i = 1, 2$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - v_1, \dot{\varepsilon}_2 = k_1 \varepsilon_2 + \psi(t) - v_2, \varepsilon_{1,2}, v_{1,2} \in R$$

$$v_1 = M_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \begin{cases} M_1 \text{sign} \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ M_1 l_1 \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| \leq 1/l_1; \end{cases}$$

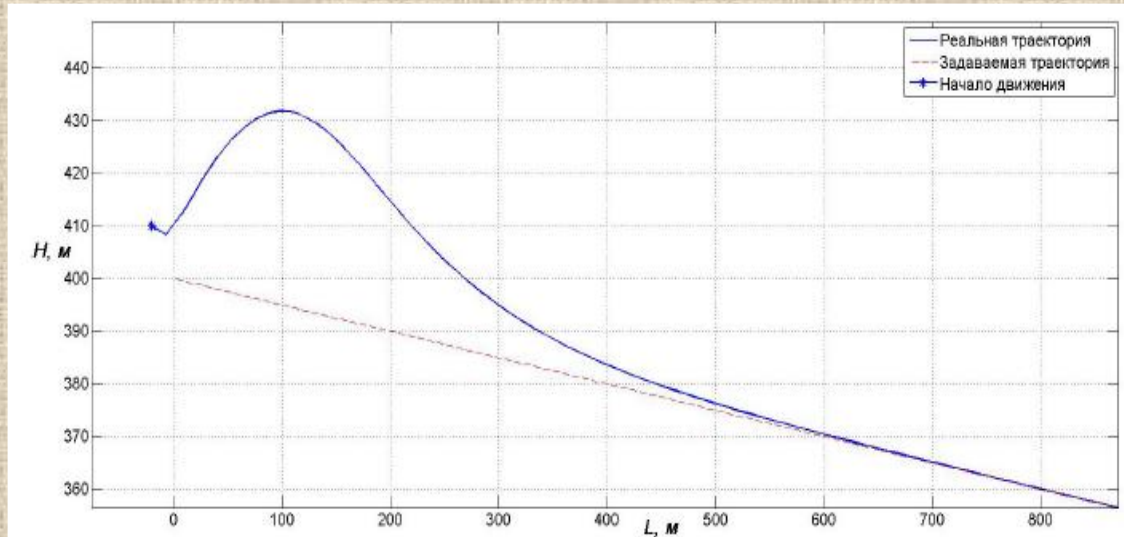
$$v_2 = M_2 \text{sat}(l_2 v_1) = \begin{cases} M_2 \text{sign} v_1, & |v_1| > 1/l_2, \\ M_2 l_2 v_1, & |v_1| \leq 1/l_2, \end{cases}$$

## Результат

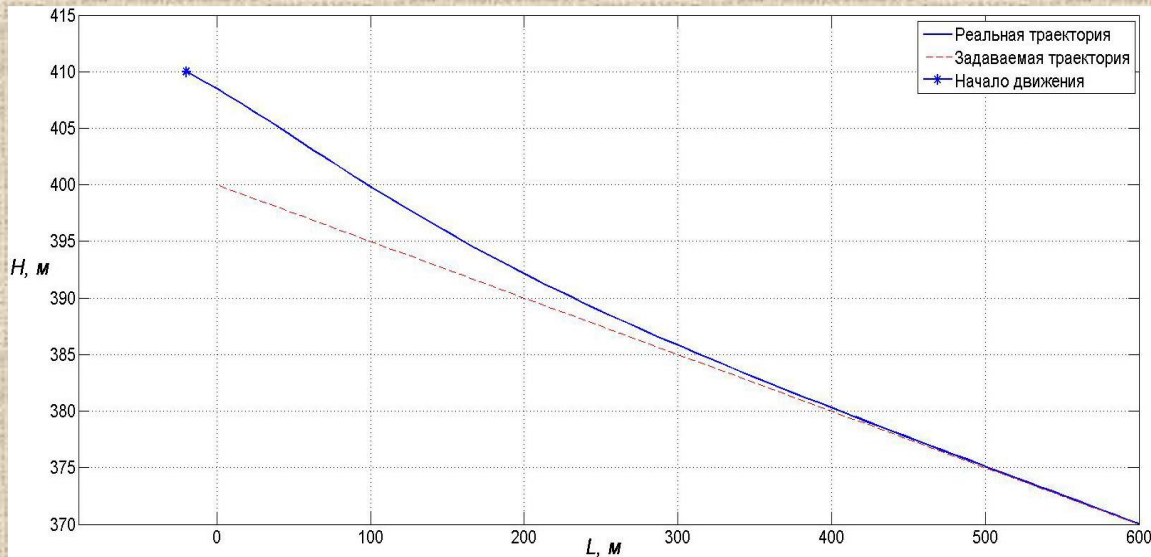
$$v_1 = \varepsilon_2, v_2 = \psi(t)$$

## Результаты моделирования

$H_d = 400 - 4t$ ,  $L_d = 80t$ ,  $\eta_1(t) = 2 \sin t$ ,  $\eta_2(t) = 0,01 \sin 2t$ ,  
 $K_1 = K_2 = I$ , точность оценивания  $\delta = 0,001 \forall t > t_0 = 1$  [с]  
 $M_{01} = 10$ ,  $M_{02} = 100$ ,  $l_{01} = 500$ ,  $l_{02} = 900$ .  $l_{11} = l_{12} = 10$   
 $M_{11} = M_{12} = 500$ ,  $M_{21} = M_{22} = 100$ ,  $l_{21} = l_{22} = 100$ .



Заданная и реальная траектории при старте наблюдателей в момент времени  $t = 0$



Заданная и реальная траектории полета при старте наблюдателей в момент времени  $t = -T$

### Преимущества специальных наблюдателей

- порядок замкнутой системы не увеличивается ввиду отсутствия фильтров
- уменьшение перерегулирования в начале переходных процессов (сигналы в наблюдателе)

## Выводы

1) Для нелинейных систем, представимых в регулярной канонической форме с учетом возмущений, разработаны декомпозиционные процедуры синтеза непрерывных, ограниченных корректирующих воздействий наблюдателей состояний и возмущений, размерности которых равны размерности модели объекта управления. Разработаны новые типы корректирующих воздействий: в виде гладких сигма-функций и более простых в реализации, но негладких кусочно-линейных функций. Данные наблюдатели в допределельной ситуации сохраняют преимущества наблюдателей с разрывными корректирующими воздействиями, функционирующих в скользящем режиме.

2) В качестве приложений разработанные процедуры синтеза наблюдателей с сигмоидальными и кусочно-линейными корректирующими воздействиями применены для асинхронного электропривода и динамики центра масс летательного аппарата соответственно, в условиях действия внешних возмущений.