



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
**ИНСТИТУТ  
ПРОБЛЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ**  
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**Арутюнов Арам Владимирович**

**Анормальные задачи теории экстремума,  
оптимального управления  
и нелинейного анализа**

**Заведующий лабораторией  
«Математических методов исследования  
оптимальных управляемых систем  
им. В.Ф. Кротова»  
(Лаборатория №45)**

# Необходимые условия экстремума первого и второго порядка в задачах с ограничениями. Понятие анормальности

$$f_0(x) \rightarrow \min$$

$$f_1(x) = 0, f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^k \lambda^i f_i(x), \quad \lambda \neq 0$$



# Необходимые условия экстремума первого и второго порядка в задачах с ограничениями. Понятие аномальности

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, \lambda) = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x_0, \lambda)h, h \right\rangle \geq 0$$

$$\langle f'_i(x_0), h \rangle = 0, \quad i = \overline{1, k}$$



# Необходимые условия экстремума первого и второго порядка в задачах с ограничениями. Понятие анормальности

Анормальная точка  $x_0$ :

$f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_k(x_0)$  линейно зависимы

$$Q_0(x) \geq 0, \\ Q_1(x) = 0, Q_2(x) = 0, \dots, Q_k(x) = 0$$

$$\text{Здесь } Q_i(x) = \langle Q_i x, x \rangle, \quad i = \overline{1, k}$$



# Необходимые условия экстремума первого и второго порядка в задачах с ограничениями.

## Понятие аномальности

Приложения:

- теория бифуркаций,
- теория чувствительности,
- разрешимость нелинейных уравнений.



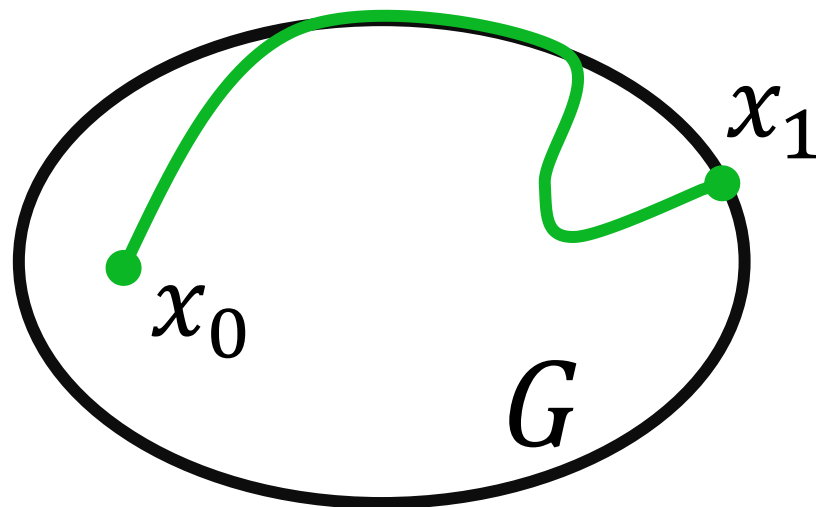
## Задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями

$$\dot{x} = f(t, x, u), u \in U$$

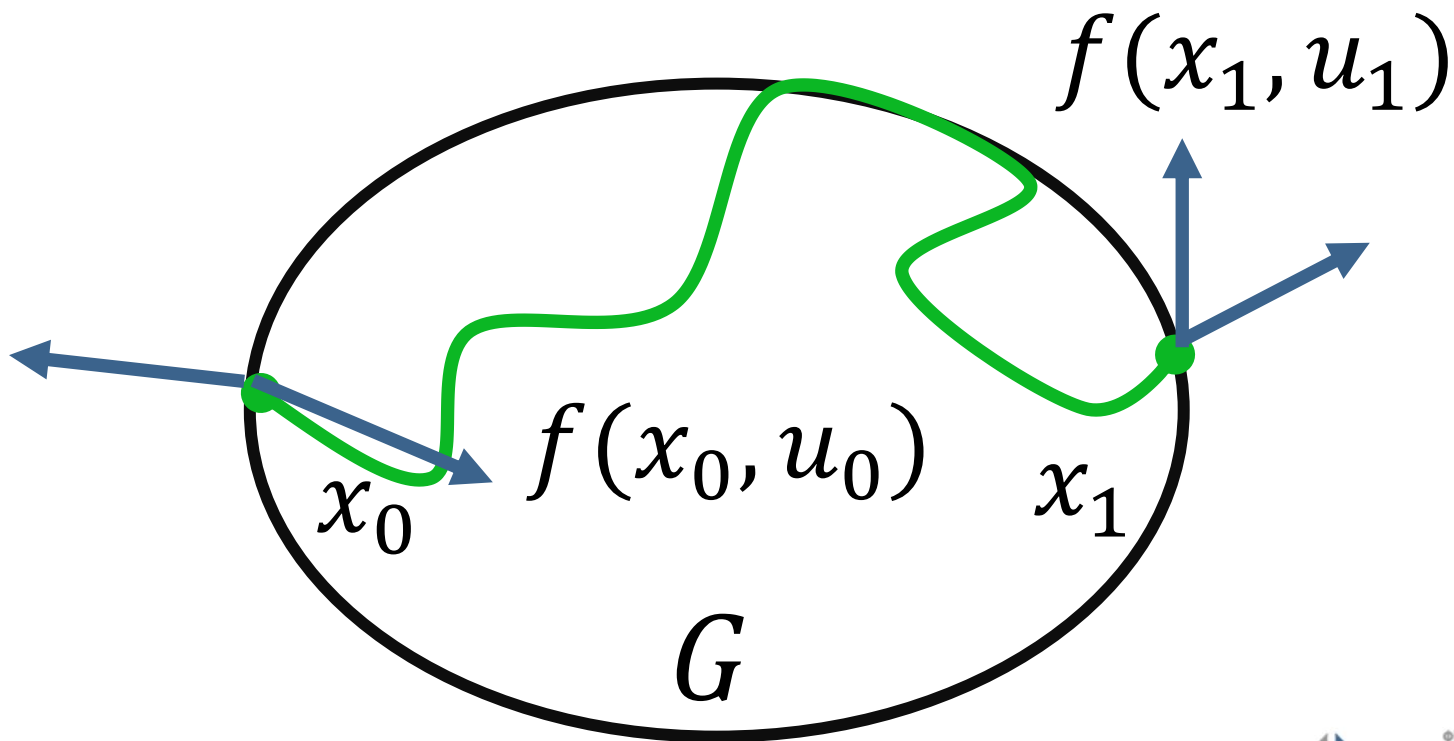
$$x(0) = x_0, x(1) = x_1$$

$$x(t) \in G \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$J(u(\cdot)) \rightarrow \min$$



## Условие управляемости в конечных точках



## Теорема об обратной функции в окрестности аномальной точки

$$F(x) = y, \quad F(x_0) = y_0$$

$F'(x_0)$  не сюръективно

$$x_1^2 + \sigma x_2^2 = y$$

$$Q(x) = y,$$

$$Q = (Q_1, \dots, Q_k)$$





## Необходимые условия второго порядка в задачах оптимального управления

Анормальность означает,  
что линеаризованная система

$$\begin{aligned}\dot{\delta x} &= \frac{\partial f}{\partial x}(t)\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}(t)\delta u, \\ \delta x(0) &= 0\end{aligned}$$

не является локально управляемой.



# Необходимые условия второго порядка в задачах оптимального управления

Приложения:  
задачи оптимального управления  
с импульсными управлениями,  
достаточные условия локальной управляемости  
на аномальной экстремали.



## Достаточные условия второго порядка для бесконечномерных задач

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad F(x) = y$$

$$F: X \rightarrow Y$$

Приложения:

достаточные условия локального минимума  
для задач оптимального управления.



## Вырожденные квадратичные формы вариационного исчисления

$$\int_0^1 A(t)[\dot{x}, \dot{x}] + B(t)[x, x] + 2C(t)[\dot{x}, x] dt$$

Пример вырождения:  $A(t) \equiv t^\alpha A_0$



## Точки совпадения двух отображений

$$\Psi, \Phi: X \rightarrow Y$$

$$\Psi(x) = \Phi(x)$$

1.  $\Psi$  —  $\alpha$ -накрывающее,  $\Phi$  —  $\beta$ -липшицево,  $\beta < \alpha$ .
2.  $\Psi$  — порядково накрывающее,  $\Phi$  — монотонно.



# Точки совпадения двух отображений

$$\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset$$

Приложения:

1. В математической экономике точка совпадения — это равновесная цена.
2. Задача о преследовании одного движущегося объекта другим.

# Литература

1. Арутюнов А.В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 27. С. 147–235.
2. Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
3. Arutyunov A.V. Optimality conditions: Abnormal and degenerate problems. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2000. 299 p. (Mathematics and its Applications; vol. 526).
4. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006.



# Литература

5. Арутюнов А.В. Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа // Успехи математических наук. 2012. Т. 67, вып. 3 (405). С. 3–62.
6. Арутюнов А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу. М.: Физматлит, 2014.
7. Arutyunov A., Obukhovskii V. Convex and set-valued analysis. Berlin; Boston: De Gruyter, 2016.
8. Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F.L. Optimal Impulsive Control: The Extension Approach. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; Vol. 477).



## Состав лаборатории

**Арутюнов А.В.**  
**Жуковский С.Е.**  
**Павлова Н.Г.**  
**Алексеев А.В.**  
**Котюков А.М.**  
**Никаноров С.О.**

**Хрусталев М.М.**  
**Агапова А.С.**  
**Даниленко О.В.**  
**Онегин Е.Е.**  
**Румянцев Д.С.**  
**Царьков К.А.**

**Афанасьев В.Н.**  
**Куржанский А.Б.**  
**Филимонов Н.Б.**



**Афанасьев В.Н.**



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
**ИНСТИТУТ  
ПРОБЛЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ**  
ИМ. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**Разработка методов синтеза оптимального управления для нелинейных систем с неконтролируемыми возмущениями.**

**Хрусталеv М.М., Агапова А.С., Даниленко О.В.,  
Онегин Е.Е., Румянцев Д.С., Царьков К.А.**

**Исследование проблем теории оптимального управления и терминальной инвариантности для детерминированных и стохастических динамических систем функционирующих в условиях неопределенности.**

**Развитие принципа расширения В.Ф. Кротова применительно к новым классам задач управления.**

**Приложения к морским, авиа-ракетно-космическим, робототехническим объектам, макроэкономическим процессами и др.**