ГРАДИЕНТНЫЙ ПОДХОД К ОНЛАЙН ОПТИМИЗАЦИИ РОБАСТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СКОЛЬЗЯЩИМ РЕЖИМОМ

А. В. Назин, д.ф.-м.н, в.н.с. лаб. 7 ИПУ РАН

nazine@ipu.ru

25 января 2024 г.

УЧЕНЫЙ СОВЕТ ИПУ РАН

ПЛАН ДОКЛАДА

0. Несколько слов...
1. Краткое введение
2. Нелинейный объект управления с неопределенностью. Постановка задачи
3. Краткие сведения о методе зеркального спуска (МЗС)
4. Желаемая динамика и МЗС в непрерывном времени
5. Синтез робастного контроллера. Основные результаты
6. Заключение
7. Список литературы

0 Несколько слов...

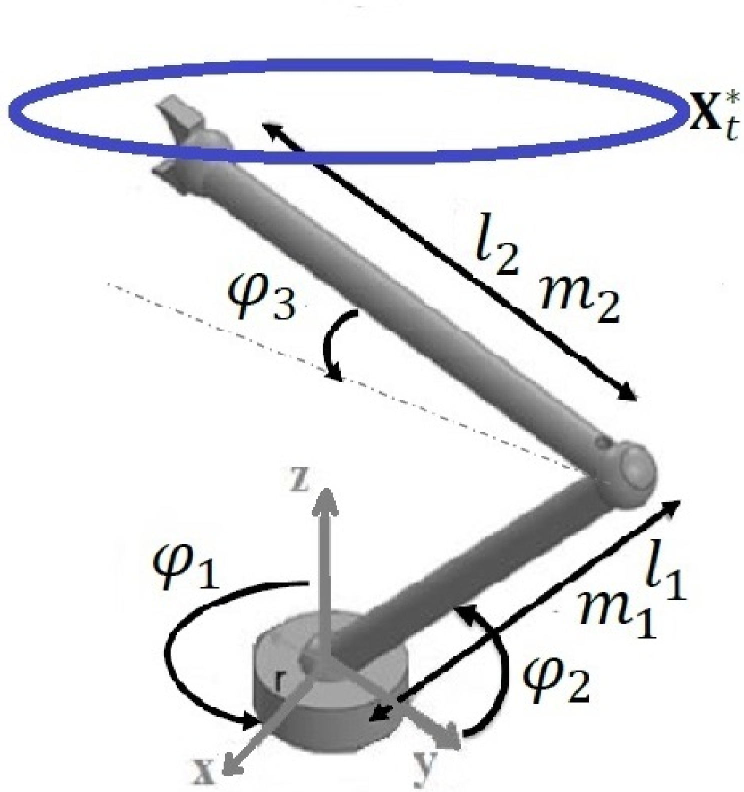
Доклад основан на трех недавних публикациях:

A.S. Poznyak, A.V. Nazin, H. Alazki. Integral Sliding Mode Convex Optimization in Uncertain Lagrangian Systems Driven by PMDC Motors: Averaged Subgradient Approach // *IEEE Trans. Autom. Control* **66** (9), 4267–4273 (1–8) (2021).

A.V. Nazin, H. Alazki, A.S. Poznyak. Robust Tracking as Constrained Optimization by Uncertain Dynamic Plant: Mirror Descent Method and ASG—Version of Integral Sliding Mode Control // *Mathematics* **11**, 4112, (2023)

A.V. Nazin, A.S. Poznyak. Non-quadratic proxy functions in Mirror Descent Method applied to designing of robust controllers for nonlinear dynamic systems with uncertainty // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2024. Vol. 64. No. 4. (Accepted for publication.)

В первых двух этих статьях на вычислительных примерах иллюстрируется механический робот с тремя степенями свободы — двухзвенный робот. Здесь — для задачи слежения эталонной траектории X_t^*.



1 Краткое введение

Результаты, описанные ниже, основаны на двух известных подходах, казалось бы не связанных непосредственно между собой:

- методе зеркального спуска (МЗС), разработанного для задач выпуклой оптимизации статических стационарных систем, и

- скользящих режимах, применяемых для стабилизации и оптимизации динамических систем.

Вот несколько соответствующих ссылок.

По скользящим режимам:

С.В. Емельянов, В.И. Уткин, *Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах*, Докл. АН СССР, 152:2 (1963), 299–301.

В. И. Уткин. *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления*. - М.: Наука, 1981. – 367 с.

V. Utkin, *Sliding Modes in Control Optimization*, (Springer Verlag, Berlin, 1992).

V. Utkin, A. Poznyak, Y.V. Orlov, A. Polyakov, *Road Map for Sliding Mode Control Design. SpringerBriefs in Mathematics*, (Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2020).

По методу зеркального спуска (МЗС):

А.С. Немировский, Д.Б. Юдин. *Сложность задач и эффективность методов оптимизации.* М.: Наука, 1979.

A.S. Nemirovski, D.B. Yudin, *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization* (Chichester, Wiley, 1983).

A. Ben-Tal, A.S. Nemirovski, *The Conjugate Barrier Mirror Descent Method for Non-Smooth Convex Optimization*. MINERVA Optim. Center Report. (Haifa, Faculty of Industrial Engineering and Management, Technion – Israel Institute of Technology, 1999).

В версии МЗС с сопряженной переменной:

А.Б. Юдицкий, А.В. Назин, А.Б. Цыбаков, Н. Ваятис. Рекуррентное агрегирование оценок методом зеркального спуска с усреднением // *Пробл. передачи информ.*, 41:4 (2005), 78–96.

А.В. Назин. Алгоритмы инерционного зеркального спуска в выпуклых задачах стохастической оптимизации // *Автомат. и телемех.*, 2018, 1, 100–112.

– –

Далее показывается, что возможно объединение этих идей или подходов при некоторых предположениях.

– –

Задачи оптимизации и методы их итеративного решения интенсивно исследуются на протяжении последних десятилетий (см., например, [1–4]). Эти методы также были распространены на процессы оптимизации для класса статических объектов [5–8], где стратегии управления в большинстве публикаций, трактуемые как *методы статической оптимизации* (МСО), в непрерывном времени могут быть представлены в следующем виде:

$$F(x_t) \underset{t\to\infty}{\to} F^* := \min_{x\in X_{adm}\subseteq\mathbb{R}^n} F(x), \tag{1}$$

где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая целевая функция, X_{adm} — выпуклое допустимое множество, а процесс $(x_t)_{t\geq 0}$ порождается ОДУ

$$\dot{x}_t = u_t,\ t \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Все известные процедуры МСО отличаются лишь построением управляющего воздействия u_t (или алгоритма оптимизации) в зависимости от текущего состояния x_t (стратегия Маркова) или более глубокой доступной истории, а именно:

$$u_t = u(t, x_\tau \mid_{\tau \in [0,t]}).$$

Далее мы рассматриваем более общую и более сложную ситуацию, когда процесс $(x_t)_{t \geq 0}$ генерируется *нелинейным динамическим объектом* [9, 10]

$$\left.\begin{array}{c} \ddot{x}_t = \mathbf{f}\,(t, x_t, \dot{x}_t) + u_t, \quad t \geq 0, \\ x_0,\ \dot{x}_0 \text{ заданы},\ \ x_t, u_t \in \mathbb{R}^n, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где вектор-функция $\mathbf{f}$ в правой части предполагается неизвестной, но принадлежащей некоторому классу нелинейностей $\mathcal{C}$. Эта проблема больше похожа на задачу поиска экстремума [5], [15–17], где нелинейная динамика содержит только производные первого порядка. Отметим также [18]–[24]; подробности см. в [9] и [10].

2 Нелинейный объект управления с неопределенностью

2.1 Динамическая модель

Динамическая модель второго порядка (3) (см., например, [9, 22, 24]) может быть представлена следующим расширенным форматом:

$$\left.\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}_{1,t}\\ \dot{\mathbf{x}}_{2,t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_{2,t}\\ \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}_{1,t}, \mathbf{x}_{2,t}\right)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0_{n\times n}\\ I_{n\times n}\end{pmatrix} u_t,\\ \mathbf{x}_{1,t_0} = \mathring{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}_{2,t_0} = \mathring{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^n,\ u_t \in \mathbb{R}^n.\end{array}\right\} \tag{4}$$

Здесь переменные расширенного пространства состояний $\mathbf{x}_{1,t} = x_t$, $\mathbf{x}_{2,t} = \dot{x}_t$ — текущие координаты и их производные по времени,

$t \geq 0$. Функция $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ кусочно-непрерывная по всем переменным $t \geq 0$, $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, и предполагается неизвестной, но ограниченной:

$$\left\|\mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right)\right\|_2 \leq k_x\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right) := c_0 + c_1 \left\|\mathbf{x}_1\right\|_2 + c_2 \left\|\mathbf{x}_2\right\|_2 \tag{5}$$

с конечными положительными константами c_0, c_1, c_2. Эта неизвестная функция может включать в себя неизмеряемые непотенциальные силы, такие как кулоновское трение, гистерезис, кориолис, демпфирование, центростремительные эффекты и другие. При $c_0 > 0$ можно учитывать и ограниченные возмущения.

2.2 Эталонная траектория, динамика ошибок слежения и допустимая зона

Цель контроллера (см. ниже) — реализовать отслеживание состояния $\mathbf{x}_t$ относительно заданной эталонной траектории $\{\mathbf{x}_t^*\}_{t\geq 0}$. Определим *ошибку отслеживания* $\delta_{1,t}$, $\delta_{2,t}$ как

$$\delta_{1,t} := \mathbf{x}_{1,t} - \mathbf{x}^*_{1,t}\,, \quad \delta_{2,t} := \dot{\delta}_{1,t} = \mathbf{x}_{2,t} - \mathbf{x}^*_{2,t}\,, \tag{6}$$

где $\mathbf{x}^*_{1,t}$ — это дважды непрерывно дифференцируемая траектория, которую нужно отслеживать, удовлетворяющую

$$\dot{\mathbf{x}}^*_{1,t} = \mathbf{x}^*_{2,t} = \varphi\left(t, \mathbf{x}^*_{1,t}\right),\ t \geq 0; \quad \mathbf{x}^*_{1,0} \text{ задано.} \tag{7}$$

С учетом этого динамику отслеживания ошибок можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\dot{\delta}_{1,t}\\ \dot{\delta}_{2,t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_{2,t}\\ \mathbf{f}_{\delta}\left(t,\delta_{1,t},\delta_{2,t}\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0_{n\times n}\\ I_{n\times n}\end{pmatrix}u_t,\\ \\ \mathbf{f}_{\delta}\left(t,\delta_{1,t},\delta_{2,t}\right):=\mathbf{f}\left(t,\delta_{1,t}+\mathbf{x}^{*}_{1,t},\delta_{2,t}+\mathbf{x}^{*}_{2,t}\right)-\dot{\mathbf{x}}^{*}_{2,t}.\end{array}\right\}\qquad(8)$$

Потребуем, чтобы динамика $\delta_{1,t}$ реализовывалась за время $t\geq t_0\geq 0$ в пределах ограниченного допустимого множества $\mathcal{D}_{adm}$.

Формулировка задачи: *Основная цель — разработать робастное управление (что означает успешную работу замкнутой системы на классе неопределенности (5)), минимизирующее ошибку отслеживания* $\delta_{1,t}$ *в смысле функциональной верхней границы*

$$F(\delta_{1,t}) - \min_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} F(\delta_1) \leq O(t^{-1}). \tag{9}$$

Примеры целевых функций:

$$1)\, F\left(\delta_1\right) = \sum_{i=1}^{n} |\delta_{1,i}| = \|\delta_1\|_1 \,,$$

$$2)\; F\left(\delta_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left|\, \delta_{1,i}\right|_{\varepsilon}^{+}, \quad |z|_{\varepsilon}^{+} := \begin{cases} z - \varepsilon & \text{, если} \quad z \geq \varepsilon \\ -z - \varepsilon & \text{, если} \quad z \leq -\varepsilon \\ 0 & \text{, если} \quad |z| < \varepsilon \end{cases} \tag{10}$$

3 Краткие сведения о МЗС [25, 27]

Структура МЗС основывается на использовании преобразования Лежандра–Фенхеля [26]:

$$U_*(\zeta) = \max_{x \in X_{adm}} \left\{ \zeta^\intercal x - U(x) \right\}, \quad \forall \zeta \in E^*, \tag{11}$$

где исходное пространство $E = \mathbb{R}^n \supseteq X_{adm}$ оснащено нормой $\|\cdot\|$ (не обязательно евклидовой), непрерывно дифференцируемая сильно выпуклая функция $U : X_{adm} \to \mathbb{R}$ представляет прокси-функцию (определение см. ниже). Введем сопряженное пространство $E^* = \mathbb{R}^n$, оснащенное двойственной нормой

$$\|\zeta\|_* = \max_{\|x\|=1} \zeta^T x, \quad \forall\, \zeta \in E^*.$$

Сопряженная функция U_* в (11) имеет соответсвующее концептуальное свойство относительно сильной выпуклости U.

Определение 1 *Пусть α — положительный параметр, и пусть $\|\cdot\|$ — норма исходного пространства $E = \mathbb{R}^n$. Выпуклая функция $U : X_{adm} \to \mathbb{R}$ называется* α-сильно выпуклая *относительно соответствующей нормы $\|\cdot\|$, если*

$$U(sx + (1-s)\widetilde{x}) \le sU(x) + (1-s)U(\widetilde{x}) - \frac{\alpha}{2}s(1-s)\|x - \widetilde{x}\|^2 \quad (12)$$

для всех $x, \widetilde{x} \in X_{adm}$ и всякого $s \in [0,1]$.

Предположение (L). *Выпуклая функция $U : X_{adm} \to \mathbb{R}$ такова, что ее сопряженная U_* непрерывно дифференцируемая на E^* и ее градиент ∇U_* удовлетворяет неравенству*

$$\|\nabla U_*(\zeta) - \nabla U_*(\widetilde{\zeta})\| \le \frac{1}{\alpha}\|\zeta - \widetilde{\zeta}\|_*, \quad \forall\, \zeta, \widetilde{\zeta} \in E^*,$$

где α — положительная постоянная.

Утверждение 1 (ср. [26, 27]) *Пусть функция* $U : X_{adm} \to \mathbb{R}$ *выпуклая. Тогда сопряженная* U_* *к функции* U *имеет следующие свойства:*

1. *Функция* $U_* : E^* \to \mathbb{R}$ *выпуклая и имеет сопряженную* U, *т.е.*

$$\forall\, x \in X_{adm}, \quad U(x) = \sup_{\zeta \in E^*} \left\{ \zeta^T x - U_*(\zeta) \right\} .$$

2. *Если функция* U α*-сильно выпуклая относительно нормы* $\| \cdot \|$, *то*

   (i) *Предположение (L) справедливо,*

   (ii) $\operatorname*{argmax}_{x \in X_{adm}} \left\{ \zeta^T x - U(x) \right\} = \nabla U_*(\zeta) \in X_{adm} \ , \quad \forall \zeta \in E^*.$

Доказательство этого утверждения см. [28, 29].

Определение 2 *Функция* $U : X_{adm} \to \mathbb{R}_+$ *называется* прокси функцией, *если она выпуклая и*

(i) существует точка $x_* \in X_{adm}$, *для которой*

$$\min_{x \in X_{adm}} U(x) = U(x_*),$$

(ii) Предположение (L) справедливо.

Отметим, что равенство в пункте 2.ii утверждения 1 обеспечивает отображение E^* на множество X_{adm}, поскольку

$$\nabla U_* (\zeta) = \arg \max_{x \in X_{adm}} \{\zeta^{\mathsf{T}} x - U(x)\}, \quad \forall \zeta \in E^*, \tag{13}$$

что представляет собой ключевую конструкцию методов зеркального спуска.

4 Желаемая динамика и МЗС в непрерывном времени

Далее используем обозначение допустимого множества

$$X_{adm} := \mathcal{D}_{adm}. \tag{14}$$

4.1 Основные предположения A1 – A5

A1 Текущий вектор состояний и их производные по времени $(\mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{x}}_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ объекта (4) предполагаются измеряемыми (доступными) онлайн и непрерывно дифференцируемы в любой момент времени $t \geq 0$.

A2 Функция $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{1+2n} \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая (5), кусочно непрерывна по всем переменным и неизвестна.

A3 Текущий вектор состояний эталонной траектории и его производная по времени $(\mathbf{x}_t^*, \dot{\mathbf{x}}_t^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ также должны быть доступными онлайн и непрерывно дифференцируемыми для каждого момента времени $t \geq 0$.

A4 Предполагается, что субградиент $F' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ функции потерь $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ доступен онлайн на ошибке слежения $\delta_{1,t}$ в текущий момент $t \geq 0$, и что множество оптимизаторов δ_1^* функции $F(\cdot)$ на множестве $\mathcal{D}_{adm}$ включает в себя начало координат $\delta_1^* = 0$, то есть

$$0 \in Arg \min_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} F(\delta_1).$$

A5 Допустимое множество $\mathcal{D}_{adm}$ является непустым выпуклым компактом.

4.2 Инерционный МЗС (ИМЗС) в непрерывном времени

Определим динамику сопряженной переменной $\zeta_t \in \mathbb{R}^n$ и исходной переменной $\delta_{1,t} \in \mathbb{R}^n$ как

$$\left.\begin{array}{c} \dot{\zeta}_t = -F'(\delta_{1,t}), \quad F'(\delta_{1,t}) \in \partial F(\delta_{1,t}), \quad \zeta_{t_0} = 0, \\ (t+\theta)\,\dot{\delta}_{1,t} + \delta_{1,t} = \nabla U_*\left(\zeta_t - \eta\right), \;\; t \geq t_0 \geq 0, \; \eta \in \mathbb{R}^n, \; \theta > 0. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Замечание 1 *Второе дифференциальное уравнение в* (15) *можно проинтегрировать:*

$$(t+\theta)\,\delta_{1,t} - (t_0+\theta)\,\delta_{1,t_0} = \int\limits_{\tau=t_0}^{t} \nabla U_*\left(\zeta_\tau - \eta\right) d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\delta_{1,t} &= \lambda_t \delta_{1,t_0} + (1-\lambda_t)\left[\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{\tau=t_0}^{t} \nabla U_*\left(\zeta_\tau - \eta\right) d\tau\right] \in \mathcal{D}_{adm},\\ \lambda_t &:= \frac{t_0+\theta}{t+\theta} \in [0,\,1]\,,\end{aligned}$$

то есть $\delta_{1,t} \in \mathcal{D}_{adm}\ \forall\, t \geq t_0$ *из-за выпуклости и* (11)–(13)*.*

4.3 Почему желательна эта динамика $\delta_{1,t}$?

Теорема 1 *Если в предположениях A1–A5 прокси-функция* $U(\cdot)$ *выбрана так, что ее минимум на допустимом множестве* $\mathcal{D}_{adm}$ *достигается в начале координат, то на траекториях* $\delta_{1,t}$*, сгенерированных* (15)*, для всех* $t \geq t_0 \geq 0$ *выполняется следующее свойство:*

$$F(\delta_{1,t}) - \min_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} F(\delta_1) \leq \left[F(\delta_{1,t_0}) - F(0)\right] \frac{t_0+\theta}{t+\theta}. \qquad (16)$$

Замечание 2 *Интересно отметить, что результат* (16) *не зависит явно от прокси-функции* $U(\cdot)$. *Действительно, определив*

$$\delta_1^*(\eta) := \arg\min_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} \left\{ -\eta^{\intercal} \delta_1 + U(\delta_1) \right\} = \nabla U_*(\eta), \tag{17}$$

мы получим

$$\delta_1^*(\eta)\,|_{\eta=0} = \arg\min_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} U(\delta_1) = 0, \tag{18}$$

что не зависит от выбранной прокси-функции $U : \mathcal{D}_{adm} \to \mathbb{R}$.

Пример 1 (прокси-функция как квадрат Евклидовой нормы) *Рассмотрим прокси-функцию* $U(\delta_1) = \dfrac{1}{2}\left\|\delta_1\right\|^2$ *с евклидовой нормой* $\|\cdot\|$, *т.е.* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, *и пусть допустимое множество представляет собой евклидов* r*-шар,* $r > 0$, *то есть*

$$\mathcal{D}_{adm} := \left\{\delta_1 \in \mathbb{R}^n : \left\|\delta_1\right\|_2 \leq r\right\}. \tag{19}$$

Чтобы вычислить $\delta_1^*(\eta)$ *в соответствии с* (17), *достаточно заметить, что решение задачи минимизации*

$$2\eta^{\mathsf{T}}\delta_1 + \left\|\delta_1\right\|_2^2 = \left\|\delta_1 + \eta\right\|_2^2 - \left\|\eta\right\|_2^2 \to \min_{\left\|\delta_1\right\|_2 \leq r}$$

таково:

$$\delta_1^*\left(\eta\right) = \left\{\begin{array}{ccc} -\eta & , & \textit{если} \quad \left\|\eta\right\|_2 \leq r \\ -\dfrac{\eta}{\left\|\eta\right\|_2}r & , & \textit{если} \quad \left\|\eta\right\|_2 > r \end{array}\right. .$$

Пример 2 (энтропийная прокси-функция на симплексе Θ_N) *Рассмотрим ограниченный выпуклый многогранник $X \subset \mathbb{R}^n$ как выпуклая оболочка его N вершин $r_i \in X$, $i = 1, \ldots, N$: для любого $x \in X$ существует такой вектор $\theta = (\theta_1\,, \ldots\,, \theta_N)^T \in \Theta_N$, что*

$$x = x(\theta) = \sum\nolimits_{i=1}^{N} \theta_i r_i\,, \tag{20}$$

где

$$\Theta_N = \left\{\theta = (\theta_1\,, \ldots\,, \theta_N)^T \mid \forall \theta_i \geq 0,\ \sum\nolimits_{i=1}^{N} \theta_i = 1\right\} \tag{21}$$

обозначает стандартный N-симплекс. Введем $(n \times N)$-матрицу

$$\Xi := (r_1 \cdots r_N). \tag{22}$$

Следовательно, уравнение (20) может быть записано как

$$x(\theta) = \Xi\,\theta, \quad \theta \in \Theta_N\,. \tag{23}$$

Очевидно, выпуклая задача оптимизации

$$F(x) \to \min_{x \in X}, \tag{24}$$

эквивалентна

$$F(x(\theta)) \to \min_{\theta \in \Theta_N}. \tag{25}$$

Предполагая, что функция $F : \operatorname{int} X \to \mathbb{R}$ *выпуклая, выполняется*

$$F'_\theta(x(\theta)) = \Xi^T F'_x(x(\theta)) \tag{26}$$

для любого $\theta \in \operatorname{int} \Theta_N$*. Значит, инерционный МЗС для задачи оптимизации* (25) *записывается следующим образом:*

$$\begin{aligned} \dot{z}_t &= -F'_\theta(x(\theta_t)), \quad z_0 = 0 \in \mathbb{R}^N, & (27)\\ \mu_t \dot{\theta}_t + \theta_t &= \nabla_z U_*(z_t), \quad t \geq 0, \quad \theta_0 \in \operatorname{int} \Theta_N. & (28) \end{aligned}$$

Здесь $\mu_t = t + \theta$*,* $\theta > 0$*, а вектор-функция* $\nabla U_* : \mathbb{R}^N \to \Theta_N$ *имеет*

i-ю компоненту

$$\frac{\partial U_*(z)}{\partial z_i} = e^{-z_i} \left(\sum\nolimits_{k=1}^{N} e^{-z_k} \right)^{-1}, \; i = 1, \ldots, N. \tag{29}$$

Теперь, применяя отображение $x(\theta)$ (23) и полагая $x_t = x(\theta_t)$, получаем ИМЗС для задачи оптимизации (25) из (26)–(28)

$$\begin{aligned} \dot{z}_t &= -\,\Xi^T F'(x_t), \quad z_0 = 0 \in \mathbb{R}^N, \qquad (30)\\ (t+\theta)\dot{x}_t + x_t &= \Xi\,\nabla U_*(z_t), \; t \geq 0, \; x_0 \in \operatorname{int} X. \qquad (31) \end{aligned}$$

Следует использовать дополнительное исходное предположение:

$$\theta \dot{x}_0 + x_0 = \frac{1}{N} \Xi \mathbf{1}_N = \frac{1}{N} \sum\nolimits_{i=1}^{N} r_i \,. \tag{32}$$

Например, если многогранник $X = \mathcal{D}_{adm}$ является ℓ_1-шаром радиуса r, тогда

$$\theta \dot{x}_0 + x_0 = \frac{1}{N} \sum\nolimits_{i=1}^{N} r_i = 0\,. \tag{33}$$

5 Синтез робастного контроллера. Основные результаты

5.1 Вспомогательная переменная и ее динамика

Введем

$$s_t = (t+\theta)\,\delta_{2,t} + \delta_{1,t} - \nabla U_*\left(\zeta_t - \eta\right), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Заметим, что функция s_t измеряема онлайн, и что ситуация, когда

$$s_t = 0 \text{ для всех } t \geq t_0\,, \tag{34}$$

точно соответствует желаемому режиму (15), начиная с момента t_0. Тогда для $V\left(s_t\right) = \frac{1}{2}\left\|s_t\right\|_2^2$ в силу уравнений динамического объекта

(8) и первого уравнения в (15) имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}V\left(s_t\right) = s_t^{\intercal}\dot{s}_t = s_t^{\intercal}\left[2\dot{\delta}_{1,t} + (t+\theta)\,\dot{\delta}_{2,t} - \frac{d}{dt}\nabla U_*\left(\zeta_t - \eta\right)\right] = \\
s_t^{\intercal}\left(2\delta_{2,t} + (t+\theta)\left[\mathbf{f}\left(t, \delta_{1,t} + x_{1,t}^*, \delta_{2,t} + x_{2,t}^*\right) - \dot{x}_{2,t}^* + u_t\right] - \nabla^2 U_*\left(\zeta_t - \eta\right)\dot{\zeta}_t\right) = \\
(t+\theta)\, s_t^{\intercal}\mathbf{f}\left(t, \delta_{1,t} + x_{1,t}^*, \delta_{2,t} + x_{2,t}^*\right) + \\
(t+\theta)\, s_t^{\intercal}\underbrace{\left[\frac{2}{t+\theta}\delta_{2,t} - \dot{x}_{2,t}^* + u_t + \frac{1}{t+\theta}\nabla^2 U_*\left(\zeta_t - \eta\right)F'(\delta_{1,t})\right]}_{-k_t\mathrm{Sign}(s_t)} \leq \\
(t+\theta)\left\|s_t\right\|_2\left\|\mathbf{f}\left(t, \delta_{1,t} + x_{1,t}^*, \delta_{2,t} + x_{2,t}^*\right)\right\|_2 - (t+\theta)\,k_t s_t^{\intercal}\mathrm{Sign}\left(s_t\right) \leq \\
(t+\theta)\left[\left\|s_t\right\|_2\underbrace{\left(c_0 + c_1\left\|\delta_{1,t} + x_{1,t}^*\right\|_2 + c_2\left\|\delta_{2,t} + x_{2,t}^*\right\|_2\right)}_{k_{x,t} := k_x(\delta_{1,t} + x_{1,t}^*, \delta_{2,t} + x_{2,t}^*)} - k_t s_t^{\intercal}\mathrm{Sign}\left(s_t\right)\right].
\end{gathered}
$$

Здесь

$$\mathrm{Sign}\left(s_t\right) = \left(\mathrm{sign}\left(s_{1,t}\right), ..., \mathrm{sign}\left(s_{n,t}\right)\right)^{\mathsf{T}},$$

$$\mathrm{sign}\left(s_{i,t}\right) \begin{cases} = +1 & ,\ \text{если} \quad s_{i,t} > 0 \\ = -1 & ,\ \text{если} \quad s_{i,t} < 0 \\ \in [-1, +1] & ,\ \text{если} \quad s_{i,t} = 0 \end{cases} .$$

5.2 Структура робастного управления

Поскольку

$$s_t^{\mathsf{T}} \mathrm{Sign}\left(s_t\right) = \sum_{i=1}^{n} \left|s_{i,t}\right| \geq \left\|s_t\right\|_2$$

и вводя

$$k_t = k_{x,t} + \rho,\ \ \rho > 0,$$

получаем

$$\frac{d}{dt}V\left(s_t\right) \leq \left(t+\theta\right)\left\|s_t\right\|_2\left(k_{x,t}-k_t\right) = -\left(t+\theta\right)\rho\sqrt{2V\left(s_t\right)},$$

что дает

$$\frac{dV\left(s_t\right)}{\sqrt{V\left(s_t\right)}} \leq -\left(t+\theta\right)\sqrt{2}\rho dt,$$

$$2\left(\sqrt{V\left(s_t\right)}-\sqrt{V\left(s_{t_0}\right)}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\left[\left(t+\theta\right)^2-\left(t_0+\theta\right)^2\right],$$

$$0 \leq \sqrt{V\left(s_t\right)} \leq \sqrt{V\left(s_{t_0}\right)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\rho\left[\left(t+\theta\right)^2-\left(t_0+\theta\right)^2\right].$$

Это означает, что для всех $t \geq t_{reach}$, где

$$t_{reach} := \left\{t : \sqrt{V\left(s_{t_0}\right)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\rho\left[\left(t+\theta\right)^2-\left(t_0+\theta\right)^2\right]=0\right\}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\rho}\left\|s_{t_0}\right\|_2+\left(t_0+\theta\right)^2}-\theta.$$

Наконец, получаем робастное управление

$$
\begin{aligned}
u_t &= -\frac{2}{t+\theta}\delta_{2,t} + \dot{x}^*_{2,t} - \frac{1}{t+\theta}\nabla^2 U_*\left(\zeta_t - \eta\right) F'(\delta_{1,t}) - k_t \mathrm{Sign}\left(s_t\right) \\
&= u_{comp,t} + u_{disc,t},
\end{aligned}
\tag{35}
$$

где

$$
u_{comp,t} := -\frac{2}{t+\theta}\delta_{2,t} + \dot{x}^*_{2,t} - \frac{1}{t+\theta}\nabla^2 U_*\left(\zeta_t - \eta\right) F'(\delta_{1,t}),
\tag{36}
$$

$$
u_{disc,t} := -k_t \mathrm{Sign}\left(s_t\right).
$$

Замечание 3 *Если мы желаем получить $t_{reach} = t_0 = 0$, нам нужно обеспечить равенство*

$$
s_0 = \theta\delta_{2,0} + \delta_{1,0} - \nabla U_*\left(-\eta\right) \overset{(17)}{=} \theta\delta_{2,0} + \delta_{1,0} - \delta_1^*\left(\eta\right) = 0. \tag{37}
$$

Поскольку $\delta_1^*(\eta) \in \mathcal{D}_{adm}$*, мы можем заключить, что параметры* $\theta > 0, \eta$ *и начальные условия* $(\delta_{1,0}, \delta_{2,0})$ *должны быть согласованы в том смысле, что*

$$\theta\delta_{2,0} + \delta_{1,0} \in \mathcal{D}_{adm}.$$

Замечание 4 *В примере 1 допустимым множеством* $\mathcal{D}_{adm}$ *является евклидовый* r*-шар в* $\mathbb{R}^n$*, а прокси-функция* $U(\delta_1) = \frac{1}{2}\|\delta_1\|_2^2$*. Тогда из* (11)–(13) *получаем градиент сопряженной функции*

$$\nabla U_*(\zeta) = \arg\max_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} \{\zeta^\mathsf{T}\delta_1 - U(\delta_1)\} = \begin{cases} \zeta & , \quad \text{если} \quad \|\zeta\|_2 \le r \\ r\dfrac{\zeta}{\|\zeta\|_2} & , \quad \text{если} \quad \|\zeta\|_2 > r \end{cases}, \tag{38}$$

и, следовательно,

$$\delta_1^*(\eta) = \arg\min_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} \left\{ -\eta^\intercal \delta_1 + U(\delta_1) \right\} \quad = \\ = \arg\min_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} \left\{ -\eta^\intercal \delta_1 + \frac{1}{2} \|\delta_1\|_2^2 \right\} \quad = \quad \eta, \qquad \textit{если} \ \ \|\eta\|_2 \le r. \tag{39}$$

Из (36) *вытекает*

$$\theta \delta_{2,0} + \delta_{1,0} = \eta, \ \ \|\eta\|_2 \le r, \tag{40}$$

и

$$\nabla^2 U_*(\zeta) = \begin{cases} I_{n\times n} & , \ \textit{если} \quad \|\zeta\|_2 \le r \\ \dfrac{r}{\|\zeta\|_2} \left(I_{n\times n} - \dfrac{\zeta\zeta^T}{\|\zeta\|_2^2} \right) & , \ \textit{если} \quad \|\zeta\|_2 > r \end{cases} . \tag{41}$$

Заметим, что ∇U_**-функция* (13) *недифференциальная в точках* r*-сферы шара и является непрерывно дифференцируемой во всех остальных точках* $\mathbb{R}^n$. *Формулы в* (38), (41) *представлены в виде их непрерывных версий на шаре.*

5.3 Основной результат

Теорема 2 *Если в предположениях A1–A5 прокси-функция* $U(\cdot)$ *выбрана таким образом, что ее минимум на допустимом множестве достигается в начале координат, то на траекториях* $\delta_{1,t}$ *в объекте* (8), *управляемом* (35), *для всех* $t \geq t_0 = 0$ *выполняется следующее свойство:*

$$F(\delta_{1,t}) - \min_{\delta_1 \in \mathcal{D}_{adm}} F(\delta_1) \leq [F(\delta_{1,0}) - F(0)] \, \frac{\theta}{t+\theta} \, . \qquad (42)$$

5.4 Обсуждение

Уравнения (17), (18) *и* (37) *справедливы при* $\theta > 0$, $\eta \in \mathbb{R}^n$ *в следующих случаях:*

1. *Нулевые начальные условия* $\delta_{1,0} = 0$, $\delta_{2,0} = 0$*. Тогда,* $\eta = 0$ *для произвольных* $\theta > 0$*; см. 1-й пример функции потерь* (10)*.*

2. *Ненулевые начальные условия* $\delta_{1,0}$, $\delta_{2,0}$ *являются коллинеарными противоположно направленными векторами. Поэтому,* $\theta > 0$ *и* $\eta = 0$ *существуют; см. также 1-й пример функции потерь* (10)*.*

3. *Уравнение* (40) *выполняется при ненулевом векторе* η *с достаточно малом* $\|\eta\| \leq \varepsilon$ *и для* $\theta > 0$*; см. 2-й пример функции потерь* (10)*.*

6 Заключение

- Задача оптимизации слежения за эталонной траекторией при заданном допустимом выпуклом компакте решается с использованием дифференциального управляемого многомерного объекта 2-го порядка с неизвестной ограниченной правой частью модели.

- Желаемая динамика переменных ошибки отслеживания рассчитывается на основе инерционного МЗС, который использует преобразование Лежандра-Фенхеля с выбранной прокси-функцией (в общем, неквадратичной).

- Установлена сходимость целевой функции к минимуму и получена связанная с ней неасимптотическая верхняя граница.

- Доказано, что данный робастный регулятор при определенной связи его параметров с начальными условиями обеспечивает определенный скользящий режим с самого начала процесса управления, а при произвольных начальных условиях реализует скользящий режим после конечного рассчитываемого интервала времени.

- Этот метод может иметь несколько применений при разработке робастного управления в механических системах, особенно в мягкой робототехнике (soft robotics) и динамических движущихся объектах [9, 10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bertsekas D.P., *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods* (New York: Academic Press, 1982).

2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. – 384 с.; 2-е изд., М.: УРСС, 2014. – 392 с.; 3-е изд., М.: УРСС, 2023. – 404 с.

3. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: Изд-во МЦНМО, 2010. – 278 с.

4. Boyd S., Vandenberghe L., *Convex optimization* (Cambridge University Press, 2004)

5. Растригин Л.А. Системы экстремального управления. М.: Наука, 1974. – 632 с.

6. Dechter R., *Constraint Processing* (Morgan Kaufmann Publisher, 2003).

7. Leader J.J., *Numerical Analysis and Scientific Computation* (Addison Wesley, 2004).

8. Sieniutycz S., Jezowski J., "Brief review of static optimization methods," In *Energy Optimization in Process Systems*, Elsevier Ltd. 1–43 (2009). DOI:10.1016/B978-0-08-045141-1.00001-9.

9. Poznyak A.S., Nazin A.V., Alazki H., "Integral Sliding Mode Convex Optimization in Uncertain Lagrangian Systems Driven by PMDC Motors: Averaged Subgradient Approach," IEEE Trans. Autom. Control **66** (9), 4267–4273 (1–8) (2021).

10. Nazin A.V., Alazki H., Poznyak A.S., "Robust Tracking as Constrained Optimization by Uncertain Dynamic Plant: Mirror Descent Method and ASG—Version of Integral Sliding Mode Control," Mathematics **11**, 4112, (2023) https://doi.org/10.3390/math11194112.

11. Krstic M., Wang H.H., "Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems," Automatica **36** (4), 595–601 (2000).

12. Ariyur K.B., Krstic M., *Real-time optimization by extremum-seeking control* (John Wiley & Sons, 2003). DOI:10.1002/0471669784

13. Tan Y., Moase W.H., Manzie C., Nešić D., Mareels I.M.Y., (2010, July), "Extremum seeking from 1922 to 2010," In *Control Conference (CCC)*, IEEE, 29th Chinese, 2010, 14–26.

14. Tan Y., Nešić D., Mareels I., "On non-local stability properties of extremum seeking control," Automatica **42** (6), 889–903 (2006).

15. Rawlings J.B., Amrit R., "Optimizing process economic performance using model predictive control," In *Nonlinear Model Predictive Control. Lecture Notes in Control and Information*

Sciences, vol 384; Magni, L., Raimondo, D.M., Allgower, F., Eds., (Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, 119–138).

16. Dehaan D., Guay M., "Extremum-seeking control of state-constrained nonlinear systems," Automatica **41** (9), 1567–1574 (2005).

17. Chunlei Z., Odóñez R., "Robust and adaptive design of numerical optimization-based extremum seeking control," Automatica **45** (3), 634–646 (2009).

18. Solis C.U., Clempner J.B., Poznyak A.S., "Extremum seeking by a dynamic plant using mixed integral sliding mode controller with synchronous detection gradient estimation," Int. J. of Robust and Nonlinear Control **29** (3), 702–714 (2018).

19. Ferrara A., Utkin V.I., "Sliding Mode Optimization in Dynamic LTI Systems," J. Optim. Theory Appl. **115** (3), 727–740 (2002).

20. Ferrara A., "A variable structure convex programming based control approach for a class of uncertain linear systems," Syst. Control. Lett. **54** (6), 529–538 (2005).

21. Simpson-Porco J.W., "Input/output analysis of primal-dual gradient algorithms," In *Communication, Control, and Computing (Allerton), 54th Annual Allerton Conference on* (IEEE, 2016, 219–224).

22. Utkin V., *Sliding Modes in Control Optimization*, (Springer Verlag, Berlin, 1992).

23. Fridman L., Poznyak A., Bejarano F.J., *Robust Output LQ Optimal Control via Integral Sliding Modes* (Birkhäuser, Springer Science and Business Media, New York, 2014).

24. Utkin V., Poznyak A., Orlov Y.V., Polyakov A., *Road Map for Sliding Mode Control Design. SpringerBriefs in Mathematics*,

(Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2020).

25. Назин А.В. Алгоритмы инерционного зеркального спуска в выпуклых задачах стохастической оптимизации // Автомат. и телемех. 2018. Вып. 1. С. 100–112.

26. Rockafellar R.T., *Convex analysis* (Princeton University Press, Princeton, 1970).

27. Юдицкий А.Б., Назин А.В., Цыбаков А.Б., Ваятис Н. Рекуррентное агрегирование оценок методом зеркального спуска с усреднением // Пробл. передачи информ. 2005. Т. 41, Вып. 4. С. 78–96.

28. Ben-Tal A., Nemirovski A.S., *The Conjugate Barrier Mirror Descent Method for Non-Smooth Convex Optimization* MINERVA Optim. Center Report. (Haifa, Faculty of Industrial Engineering and Management, Technion – Israel Institute of

Technology, 1999).
http://iew3.technion.ac.il/Labs/Opt/opt/Pap/CP_MD.pdf

29. Rockafellar R.T., Wets R.J.B., *Variational Analysis* (New York, Springer, 1998).

30. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979. – 384 с.

31. Juditsky A., Nesterov Yu., “Deterministic and stochastic primal-dual subgradient algorithms for uniformly convex minimization,” Stoch. Syst. **4**(1), 44–80 (2014). DOI: 10.1214/10-SSY010

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ !!!