Институт проблем управления РАН
им. В. А. Трапезникова, Москва

Равновесие в безопасных стратегиях

Искаков Михаил Борисович

Объект, предмет, цель исследования

Институт Проблем Управления РАН

- **Объектом исследования** являются теоретико-игровые ограниченно-рациональные (ОР) модели без равновесия Нэша (РН), в том числе - разрывные задачи. **Предметом исследования** – концепции равновесия в таких играх.
- **Цель работы** состоит в создании, разработке и обосновании новой концепции решения игры – равновесия в безопасных стратегиях (РБС), предназначенной для моделирования осторожного игрового поведения, и теоретических условий его существования, в особенности для игр, не имеющих РН-решения и характеризуемых континуальными множествами стратегий, разрывными функциями выигрыша и наилучшего ответа.

Основные задачи

Институт Проблем Управления РАН

- Реализация поставленной цели предполагает решение следующих **основных задач**:
  - 1. Формулировка системы определений РБС.
  - 2. Интерпретация ее как обобщения равновесия Нэша.
  - 3. Определение места РБС среди ограниченно рациональных теоретико-игровых моделей.
  - 4. Исследование общих условий существования РБС и разработка формальных методов построения теорем его существования.
  - 5. Формулировка конкретных критериев, доказательство теорем существования РБС.
  - 6. Применения этих критериев к хрестоматийным нерешенным разрывным игровым задачам.
  - 7. Нахождение РБС в этих задачах.

Теоретическая и практическая значимость

- **Теоретическая и практическая значимость**. Проведенное исследование является значимым так как:
  - 1) в рамках общего развития ОР моделей теории игр, предложен новый подход в рамках активно развивающейся области стратегической рефлексии;
  - 2) с теоретической точки зрения, предложен метод конструирования теорем существования равновесий.
  - 3) предложены решения практически важных игровых моделей, в особенности в классе разрывных задач без РН;
  - 4) для содержательных интерпретаций промоделированы ранее не исследованные ситуации осторожного поведения игроков.

Постановка задачи. Игровые задачи без равновесия Нэша.

Институт Проблем Управления РАН

Рассмотрим игру в нормальной форме: $\Gamma = (N, S_i, u_i(s_1,...,s_n), i \in N, s_i \in S_i)$, где N – множество игроков, s_i – стратегии игроков, u_i – выигрыши игроков.

Обозначения: профиль $s = (s_1,...,s_n) \in S = (S_1,...,S_n)$;

окружение $s_{-i} = (s_1,...,s_{i-1}, s_{i+1}...,s_n)$;

отклонение s_i' из профиля $s = (s_1,...,s_n)$ в профиль $s' = (s_1,...,s_{i-1}, s_i', s_{i+1}...,s_n)$.

Определение 0. ***Равновесием Нэша*** называется профиль $s^* = (s_1^*,...,s_n^*)$, такой что: $u_i(s^*) \geq u_i(s_i^*, s_{-i}), \forall i \in N, \forall s_{-i} \in S_{-i}$.

Исследуется класс игр, для которых не существует равновесий Нэша.

Равновесие в безопасных стратегиях – определение

Институт Проблем Управления РАН

Определение 2.1. ***Угрозой*** игрока *i* игроку *j* в профиле *s* называется такое отклонение s_i', что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_j(s_i', s_{-i}) < u_j(s)$.

Определение 2.2. Стратегия s_i игрока *i* называется ***безопасной стратегией, при заданной обстановке*** s_{-i}, если профиль *s* не содержит угроз игроку *i*. Профиль стратегий *s* называется ***безопасным профилем***, если все его стратегии безопасны.

Определение 2.3. ***Безопасным отклонением*** игрока *i* от профиля *s* называется стратегия s_i' такая, что $u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s)$ и $u_i(s_i', s_j', x_{-ij}) \geq u_i(s)$ для любой угрозы s_j' игроку *i* в профиле (s_i', s_{-i}).

Определение 2.4. Безопасный профиль стратегий называется ***равновесием в безопасных стратегиях***, если ни один игрок не может увеличить свой выигрыш безопасным отклонением.

Непосредственно из этой системы определений следует:

Утверждение 2.1. *Любое равновесие Нэша является равновесием в безопасных стратегиях.*

Обзор литературы
Модели классической рациональности и ОРМ

[Crawford 2013]: С точки зрения игровой динамики ОРМ могут опираться на предыдущий опыт в повторяющихся играх, либо, если такого опыта нет, на умозрительную рефлексию, общую для всех участников игры

Классическая рациональность	ОРМ, повторяющиеся игры	ОРМ, стратегическая рефлексия
Аксиоматическая теория ожидаемой полезности von Neumann, Morgenstern 1944. Полезность в терминах выявленных предпочтений Samuelson 1946. Равновесие Нэша Nash 1951. Рационализируемость: Bernheim 1984, Pearce 1984. Анализ и критика: Rubinstein 1998, Harstad, Selten 2013; Crawford 2013: поведение игроков чувствительно к выигрышам за пределами их равновесных стратегий.	ОРМ Simon 1955. Народная теорема Friedman 1971.Теория перспектив Kahneman, Tversky 1979. Эволюционные модели Smith 1982. Модели обучения Milgrom, Roberts 1991. Социальные предпочтения Rabin 1993. Теория адаптации стремлений Selten 1998. Теория обучения: Fudenberg, Levine 1998, Macy, Flache 2002. Теория эволюции Müller, Normann 2005. Рациональность действий и рациональность правил Aumann 2008.	ОРМ Simon 1955. Дальновидная альтернатива Harsanyi 1974. Ее формализация Chwe 1994. Дальновидные стратегии Цыганов 1991. Интерактивная эпистемология Aumann , Brandenburger 1995. Равновесие квантовых ответов McKelvey, Palfrey 1996. Когнитивная иерархия Camerer, Ho, Chong 2004. Информационное равновесие Новиков, Чхартишвили 2003. РБС Искаков 2005. K-уровневые модели Crawford, Costa-Gomes, Iriberri 2013.

Принципиальная схема теоретического обоснования РБС

Институт Проблем Управления РАН

- 1) Построен вывод определения РБС как к развитие концепции теоретико-игрового равновесия по Нэшу
- 2) На основе этого построен метод конструирования теорем существования РБС из известных теорем существования РН в форме метатеоремы
- 3) На основе предыдущего из метатеоремы получен ряд теорем существования РБС из известных теорем существования РН (Дебре, Рени, Бик)
- 4) На основе предыдущего теоремы применены к ряду известных задач без РН (Хотеллинг, Таллок-Скапердас)
- 5) Получено решение ряда задач (Хотеллинг, Таллок-Скапердас, Бертран-Эджворт, Ротшильд-Стиглиц-Вильсон) в виде РБС
- 6) Перечисленные пункты схемы соответствуют паспорту специальности 2.3.1 пункты 1, 2, 3.

Подход к конструированию теорем: наложить на игру такое условие, при котором можно было бы рассматривать игру только на множестве безопасных стратегий.

[Бурков 1977, Основы математической теории активных систем], принцип сильных штрафов: «штрафы за отклонение от реализации плана настолько велики, что единственной разумной линией поведения предприятия является безусловное выполнение принятых обязательств»

Определение 3.1. *Угроза игроку i в профиле s является* ***сильной****, если существует безопасная стратегия* $s' = (s_i', s_{-i})$*, такая, что* $u(s') = v(s') > v(s)$ *. Если для игрока i содержащиеся в любом опасном профиле угрозы являются сильными, то такой игрок имеет* ***лучшую безопасную альтернативу*** *(для него выполняется* ***условие сильных угроз****). Игра G называется игрой* ***с лучшей безопасной альтернативой*** *(или* ***с сильными угрозами****), если все игроки в ней имеют лучшую безопасную альтернативу.*

Теоремы существования РБС строятся из известных теорем существования РН, приведенных к стандартному виду.

Рассмотрим произвольную игру в нормальной форме: $\Gamma = (N, S_i, u_i(s_1,...,s_n), i \in N, s_i \in S_i)$. Обозначим как «*(######)*» некоторое ограничивающее условие, однозначно определяющее подмножество множества всех возможных игр Г.

Пример. Определим функцию наилучшего ответа: $BR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$.

(######):= «$\forall i, \forall s_{-i}, \exists! BR_i(s_{-i})$, функции $BR_i(s_{-i})$ непрерывны по s_{-i}».

Исходная теорема (приведенная к стандартному виду): «*Если для произвольной игры* Г *выполняется условие:* $\forall i, \forall s_{-i}, \exists! BR_i(s_{-i})$, *функции* $BR_i(s_{-i})$ *непрерывны по* s_{-i}, *то в игре существует равновесие Нэша*».

Метод построения теорем существования РБС. Исходная теорема & условие сильных угроз

Пусть имеется некоторое верное утверждение (**исходная теорема**): «*Если для произвольной игры выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша*».

Если дана исходная теорема и для игры выполняется условие сильных угроз, то для существования РБС достаточно потребовать выполнения условий (#####) исходной теоремы только на безопасном множестве.

Определение 3.2. *Пусть дана игра* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ *с множествами безопасности* $Q_i \subseteq S$. *Игра* $\overline{G}_{Q_i}=(S_i,\overline{u}_i)_{i=1}^N,\ \overline{u}_i(s)=\begin{cases} u_i(s), s\notin Q_i \\ C_{\min},\ s\in Q_i \end{cases}$ *называется* ***соответствующей ей обрезанной игрой***. *Условие (#####) существования равновесия Нэша* ***выполняется для игры G на безопасных множествах*** $Q_i \subseteq S$, *если оно выполняется для соответствующей обрезанной игры.*

Метатеорема существования РБС для условия сильных угроз

Теорема 2. *Пусть верно утверждение (**исходная теорема**): «Если для произвольной игры выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша». Если для игры* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ *выполняется условие сильных угроз, а на её безопасных множествах* $Q_i \subseteq S$ *выполняется условие (#####) существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях*

Рассмотрим компактную область профилей игры в квазипрямоугольном множестве $s \in B = \times_{i=1}^{N} B_i, B_i \subseteq S_i$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество стратегий игрока *i*. Содержательно множество *B* имеет смысл как множество неантагонистичности игры, в пределах которого интересы игроков непротивоположны. **Локальный вариант теоремы применим к задачам, является рабочим.**

Определение 3.3. ***Игра предоставляет лучшую безопасную альтернативу (выполняется условие сильных угроз)*** *в B, если для* $\forall i, \forall s_{-i} \in B_{-i}, \exists$ *такое непустое выпуклое компактное подмножество его безопасных стратегий* $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \in Q_i(s_{-i}) \bigcap B_i$, *что для любой точки графика* $((s_i, s_{-i}), v_i^*) \in \overline{\Gamma(v_i)}, s_i \notin \tilde{Q}_i(s_{-i}), \exists$ *стратегия* $s_i' \in \tilde{Q}_i(s_{-i})$, *в которой* $u_i(s_i', s_{-i}) = v_i(s_i', s_{-i}) > v_i^*$.

Теорема 3. *Пусть верно утверждение: «Если для произвольной игры выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша». Если для игры* $G = (S_i, u_i)_{i=1}^{N}$ *выполняется условие сильных угроз в B, а на её безопасных множествах* $Q_i \subseteq S$ *выполняется условие (#####) существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях.*

Определение Reny 1. *Игрок i* ***может гарантировать выигрыш*** $\alpha \in$ **R** *в* $s=(s_i,s_{-i})\in S$, *если* $\exists s_i' \in S_i : u_i(s_i',s_{-i}')\ge \alpha, \forall s_{-i}'$ *в некоторой окрестности* s_{-i}.

Теорема Reny 1. *Если в компактной и квазивогнутой игре* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ *для* $\forall (s^*,u^*)\in \overline{\Gamma(u)}$ *такого, что* s^* *не является равновесием Нэша, некоторый игрок i всегда может гарантировать выигрыш строго выше* u_i^*, *то в G существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.*

Определение Reny 2. *Игра* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ ***гарантирует выигрыш (payoff secure – PS)****, если* $\forall i, \forall s\in S, \forall \varepsilon>0, \exists s_i' \in S_i : u_i(s_i',s_{-i}')\ge u_i(s)-\varepsilon, \forall s_{-i}'$ *в некоторой окрестности* s_{-i}.

Определение Reny 3. *Игра* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ *является* ***взаимно верхне полунепрерывной (reciprocally upper semicontinuous – RUSC)****, если из того, что (s,u) находится в замыкании графика ее векторной функции выигрышей, и* $u_i(s)\le u_i, \forall i$ *следует, что* $u_i(s)=u_i, \forall i$.

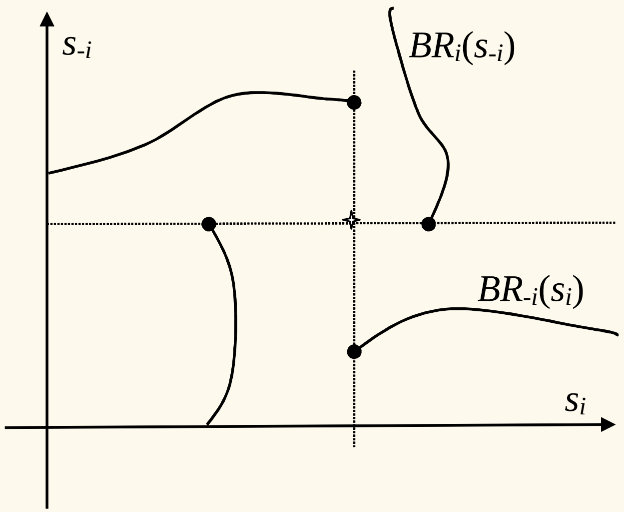
Теорема Reny 2. *Любая компактная, квазивогнутая, PS и RUSC игра достигает равновесия Нэша в чистых стратегиях.*

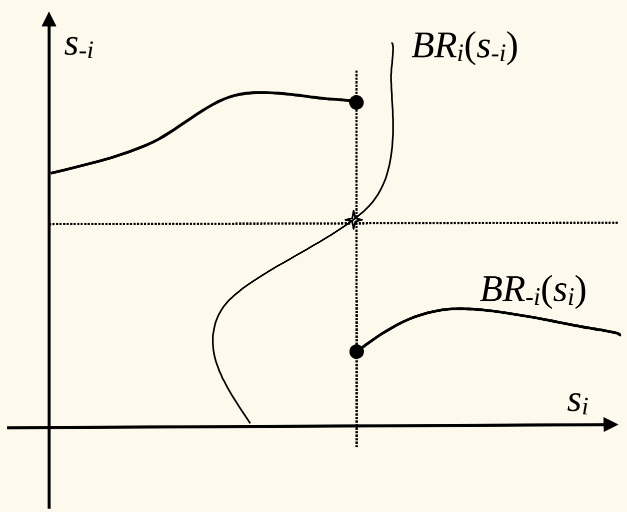
Теорема Reny: комментарий

Институт Проблем Управления РАН

Определение 3.4. *Профиль* s^*, *не являющийся равновесием Нэша, называется* ***профилем не гарантирующим выигрыш*** *или* ***точкой перескока****, если* $\exists (s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(u)} : \forall i, \forall$ *открытой окрестности* $U_{s'_{-i}}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists s'_{-i}, s''_{-i} \in U_{s'_{-i}} : M_i(u_i^* + \varepsilon, s'_{-i}) \bigcap M_i(u_i^* + \varepsilon, s''_{-i}) = \emptyset$, *где* $M_i(u_i^*, s'_{-i}) = \{s_i : u_i(s_i, s'_{-i}) > u_i^*\} \subseteq S_i$.

Случай двух игроков:





Теорема существования РБС по Reny

Адаптация теоремы Рени к случаю РБС столкнулось с техническими сложностями, так как конструкции теоремы строятся исходя из устойчивости к малым отклонениям всей совокупности окружения игрока, а РБС – исходя из устойчивости к любым односторонним отклонениям отдельных игроков.

Определение 3.14'. *Игра* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ ***гарантирует выигрыш*** *в безопасных стратегиях в В, если* $\forall i,\forall s\in\{(s_i,s_{-i}):s_i\in Q_i(s_{-i})\bigcap B_i\},\forall\varepsilon>0,$ $\exists s_i'\in B_i:v_i(s_i',s_{-i}')\geq v_i(s)-\varepsilon,\ \forall s_{-i}'$ *в некоторой окрестности* s_{-i} *в* B_{-i}.

Определение 3.12'. *Игра* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ *является* ***верхне полунепрерывной в безопасных стратегиях*** *в В, если функции выигрыша любого игрока являются верхне полунепрерывными на множестве безопасных стратегий этого игрока в В, то есть:* $\forall i,\forall s\in\{(s_i,s_{-i}):s_i\in Q_i(s_{-i})\bigcap B_i\}:\limsup\limits_{s'\to s}v_i(s')\leq v_i(s).$

Определение 3.18'. *Игра* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ ***квазивогнута в безопасных стратегиях*** *в В, если функция выигрыша любого игрока совпадает с ее квазивогнутой оболочкой на множестве безопасных стратегий этого игрока в В.*

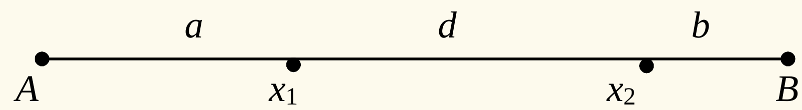
Теорема 7' (по Reny). *Если* $G=(S_i,u_i)_{i=1}^N$ *компактна, квазивогнута в безопасных стратегиях в В, верхне-полунепрерывна в безопасных стратегиях в В, гарантирует выигрыш в безопасных стратегиях в В, и выполняется условие сильных угроз в В, то G достигает РБС в В.*

Все теоремы

Институт Проблем Управления РАН

Исходные теоремы	Мета-теорема	Дебре	Рени теорема	Рени следствие	Бик
Исходные теоремы	Мета-теорема 2	Debreu, (1952)	Reny, (1999)	Reny, (1999)	Bich, (2009)
Теорема существования РБС	Мета-теорема 2	Теорема 4	Теорема 5	Теорема 6	Теорема 9
Локальный вариант	Теорема 3	Теорема 4	Теорема 5‘	Теорема 6‘	Теорема 9‘
Вариант модифицированный под задачи			Теорема 7	Теорема 8	
Рабочий вариант	Теорема 3	Теорема 4	Теорема 7‘	Теорема 8‘	

Постановка задачи Хотеллинга



На отрезке [*A* *B*] длины *l* расположены 2 игрока-продавца в точках x_1 и x_2, и континуальное количество равномерно расположенных игроков-покупателей. Рассматривается 3-шаговая игра:

Шаг 1. Продавцы определяют точки своего расположения x_1 и x_2.

Шаг 2. Продавцы определяют цену на свой товар p_1 и p_2.

Шаг 3. Покупатели выбирают продавца, у которого они покупают единицу товара.

Стоимость товара для покупателя складывается из цены на товар и транспортных затрат. Целевая функция покупателя: $u(x) = \max\{0, 1 - \min\limits_{i\in\{1,2\}}(p_i + |x_i - x|)\}$. Целевая функция продавца:

$$u_1(a,b,p_1,p_2) = p_1 q_1 = \begin{cases} p_1(v_1 + w_1), & p_1 < p_2 - d \\ p_1(v_1 + r_1), & |p_1 - p_2| \le d \\ 0, & p_1 > p_2 + d \end{cases},$$

где $v_1 = \min\{a, 1 - p_1\}$, $w_1 = \min\{d + b, 1 - p_1\}$, $r_1 = \min\left\{\dfrac{d + p_2 - p_1}{2}, 1 - p_1\right\}$.

Условия нормировки: транспортные затраты на единичное расстояние равны 1; полезность единицы товара для покупателя равна 1, плотность покупателей равна 1.

Решение ценовой игры с неэластичным спросом

Институт Проблем Управления РАН

Теорема 4.4. *Игровая эластичная задача определения цен* $(P_i = R^+, u_i(p_1, p_2), i \in \{1,2\})$ *имеет следующее единственное решение в смысле РБС для любых допустимых значений параметров* $a \geq 0,\ b \geq 0,\ a + b \leq l$*:*

1) При $\begin{matrix} a \leq 3l + b - 6\sqrt{bl}, \\ b \leq 3l + a - 6\sqrt{al}, \end{matrix}$:
$$p_1^* = l + \frac{a-b}{3}, \quad u_1^* = \frac{1}{2}(p_1^*)^2,$$
$$p_2^* = l - \frac{a-b}{3}, \quad u_2^* = \frac{1}{2}(p_2^*)^2.$$

2) При

$\begin{matrix} a \leq \dfrac{\sqrt{l} - \sqrt{b}}{\sqrt{l} + \sqrt{b}}(4\sqrt{bl} - l - b), \\ a \geq 3l + b - 6\sqrt{bl}, \end{matrix}$:
$$p_1^* = 2l - 2\sqrt{bl}, \quad u_1^* = \frac{1}{2}(p_1^*)^2,$$
$$p_2^* = 3l + b - a - 4\sqrt{bl}, \quad u_2^* = \frac{1}{2}p_2^*(l - a + b + p_1^* - p_2^*).$$

3) При

$\begin{matrix} b \leq \dfrac{\sqrt{l} - \sqrt{a}}{\sqrt{l} + \sqrt{a}}(4\sqrt{al} - l - a), \\ b \geq 3l + a - 6\sqrt{al}, \end{matrix}$:
$$p_1^* = 3l + a - b - 4\sqrt{al}, \quad u_1^* = \frac{1}{2}p_1^*(l + a - b + p_2^* - p_1^*),$$
$$p_2^* = 2l - 2\sqrt{al}, \quad u_2^* = \frac{1}{2}(p_2^*)^2.$$

Решение ценовой игры с неэластичным спросом

Институт Проблем Управления РАН

4) При $\begin{array}{l} a \ge \dfrac{\sqrt{l}-\sqrt{b}}{\sqrt{l}+\sqrt{b}}(4\sqrt{bl}-l-b), \\ b \ge \dfrac{\sqrt{l}-\sqrt{a}}{\sqrt{l}+\sqrt{a}}(4\sqrt{al}-l-a), \end{array}$:

$$p_i^* = 2(l - y_i), \quad u_i^* = l(p_{-i}^* - l + a + b), \quad i \in \{1,2\},$$

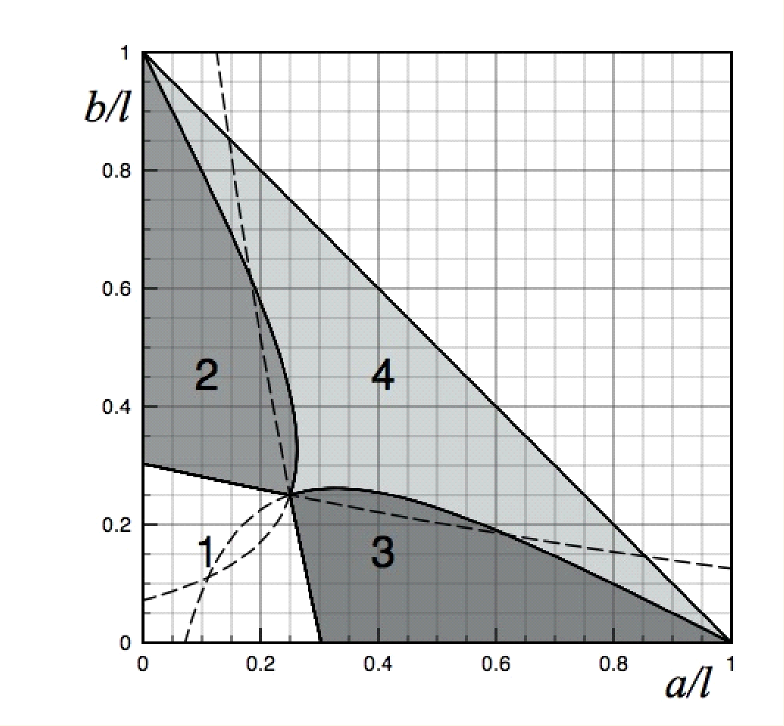
$$y_i = \sqrt[3]{-\frac{r_i}{2} + \sqrt{R_i}} + \sqrt[3]{-\frac{r_i}{2} - \sqrt{R_i}} + \frac{g_i}{6},$$

$$R_i = \left(\frac{s_i}{3}\right)^3 + \left(\frac{r_i}{2}\right)^2,$$

$$s_i = -\frac{g_i^2}{12} + \frac{f_i h_i}{2}, \quad r_i = -\frac{g_i^3}{108} + \frac{f_i g_i h_i}{12} - f_i^2 l,$$

$$g_1 = l + a + 3b, \quad h_1 = 3l - a + b, \quad f_1 = b,$$

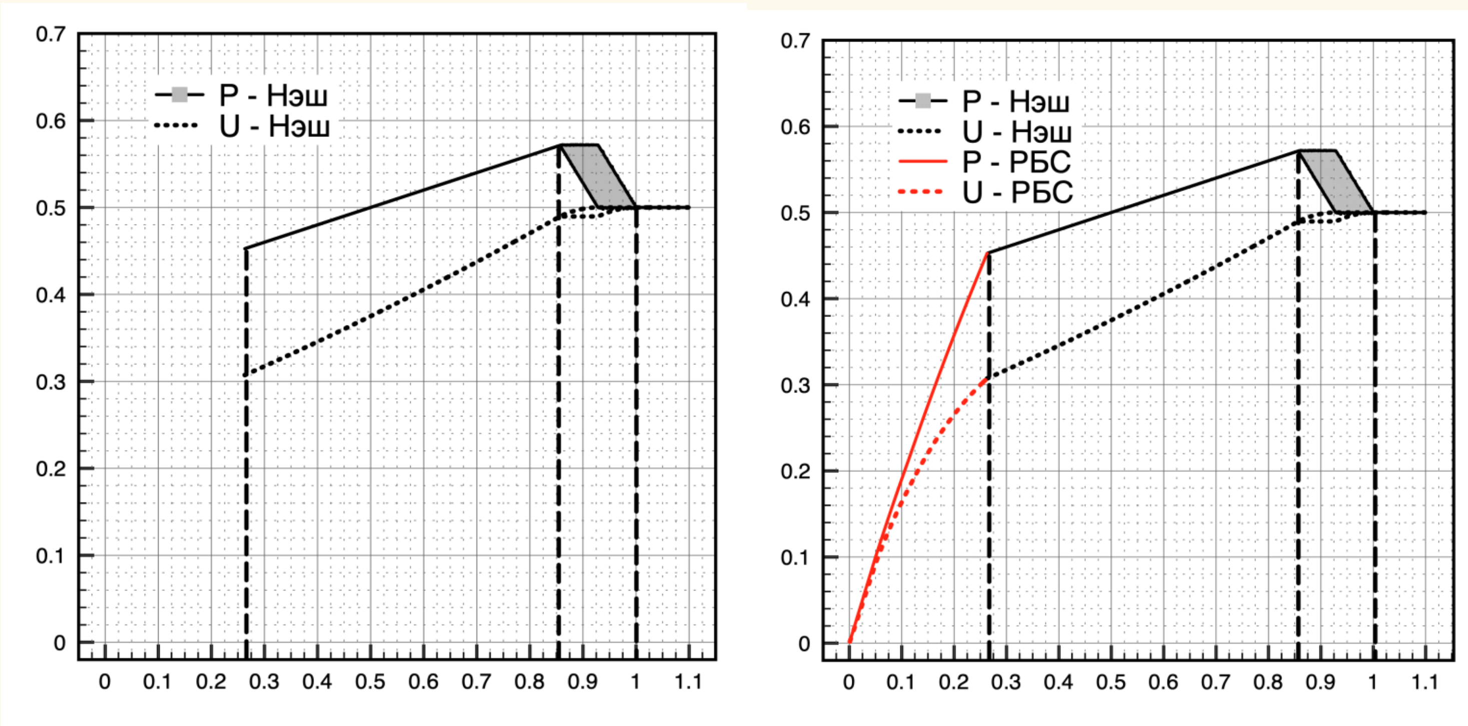
$$g_2 = l + 3a + b, \quad h_2 = 3l + a - b, \quad f_2 = a.$$



Области решений неэластичной задачи

Сравнение решений РН и РБС для задачи Хотеллинга на прямой

Институт Проблем Управления РАН



I. Решение в безопасных стратегиях: $d \in \left[0, \frac{-2.24+\sqrt{25.6}}{10.72}\right] \approx [0, 0.263]$ $\quad p^* = \frac{2+7d-\sqrt{17d^2-4d+4}}{4}$

II. Решение Хотеллинга: $d \in \left[0.263, \, {}^{6}\!/_{7}\right]$ $\quad p^* = 0.4 + 0.2d$

III. Решение на границе: $d \in \left[{}^{6}\!/_{7}, 1\right]$ $\quad p^* \in \left[\max\left\{\frac{10}{7} - d, 0.5\right\}, \min\left\{\frac{4}{7}, 1.5 - d\right\}\right]$

IV. Независимое решение: $d \geq 1 \quad p^* = 0.5$

Конкуренция за ренту Таллока-Скапердаса : Постановка задачи

Рассматривается игра n игроков, соревнующихся за получение приза единичной ценности. Стратегией игрока является платеж x_i. Вероятность получения приза составляет $\frac{f(x_i)}{\sum_{j=1}^{n} f(x_j)}$, где $f(x_i)$ – функция успеха в соревновании (contest success function – CSF), в простейшем случае $\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j}$. Целевая функция игрока:

$$u_i(x) = \frac{f(x_i)}{\sum_{j=1}^{n} f(x_j)} - x_i$$

При выполнении требований анонимности, однородности и независимости от посторонних альтернатив:

$$f(x_i) = x_i^{\alpha},\ u_i(x) = \frac{x_i^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} x_j^{\alpha}} - x_i$$

При отказе от требования анонимности:

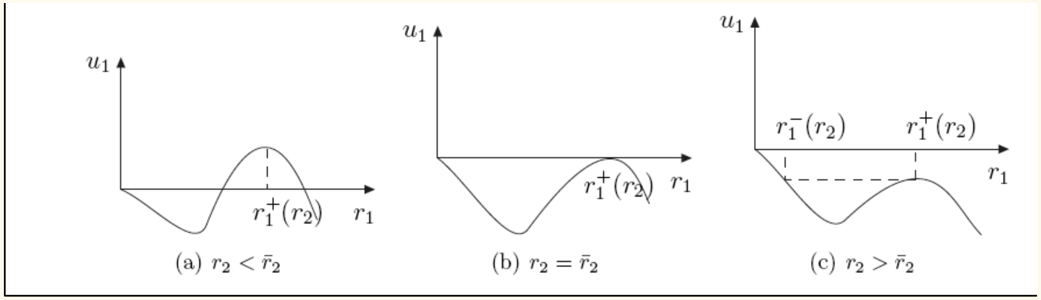
$$f(x_i) = r_i x_i^{\alpha},\ u_i(x) = \frac{r_i x_i^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j^{\alpha}} - x_i$$

Конкуренция за ренту Таллока-Скапердаса: целевые функции и функции наилучших ответов

Институт Проблем Управления РАН

Целевые функции игроков являются 2-пиковыми (α>0):

$$u_1 = \frac{x_1^\alpha}{x_1^\alpha + x_2^\alpha} - x_1, u_2 = \frac{x_2^\alpha}{x_1^\alpha + x_2^\alpha} - x_2$$



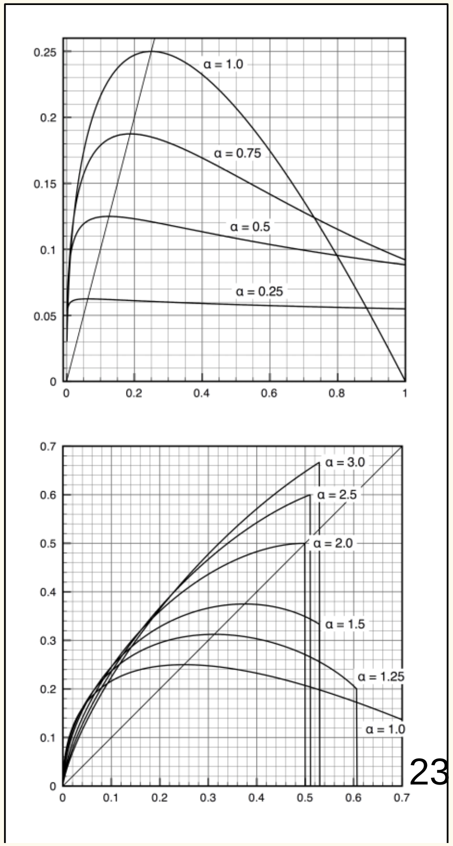
Точки максимума $x_i = BR_i(x_{-i})$

находятся из условия $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} < 0$:

$$\xi_{-i}^{+}(x_i) = \left(\frac{x_i^{\alpha-1}}{2} \left(\alpha - 2x_i + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha x_i} \right) \right)^{1/\alpha}, \max\left\{ 0, \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha} \right\} \le x_i \le \alpha / 4$$

$$\xi_{-i}^{-}(x_i) = \left(\frac{x_i^{\alpha-1}}{2} \left(\alpha - 2x_i - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha x_i} \right) \right)^{1/\alpha}, 0 \le x_i \le \alpha / 4$$

$$BR_i(x_{-i}) = \begin{cases} \xi_{-i}^{-1}(x_{-i}), & 0 < \alpha \le 1 \\ \xi_{-i}^{-1}(x_{-i}), \alpha > 1, x_{-i} \le \frac{1}{\alpha}(\alpha - 1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \\ 0, & \alpha > 1, x_{-i} > \frac{1}{\alpha}(\alpha - 1)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \end{cases}$$



Конкуренция за ренту, РБС-решение

Институт Проблем Управления РАН

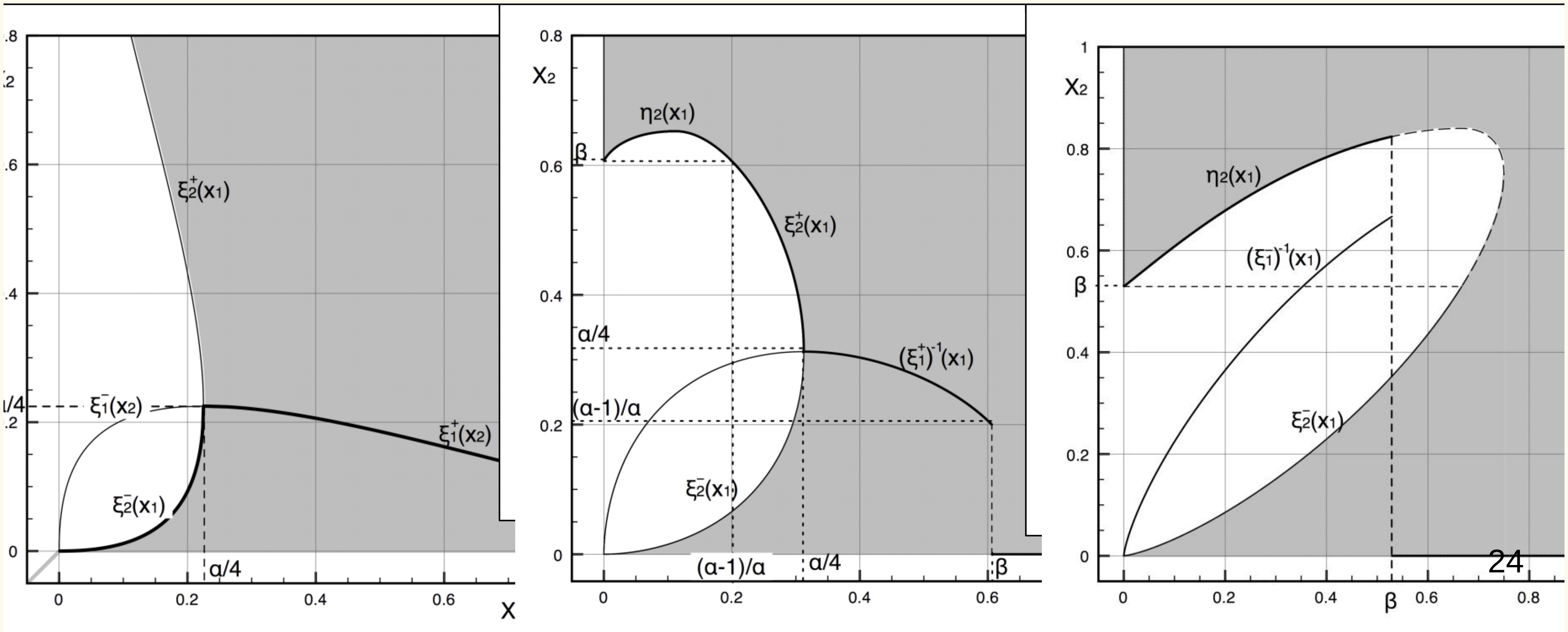
Множества безопасных профилей игрока, решения РБС:

При $\alpha \in (0,1)$: $M_{EinSS} = \{(x^*, x^*)\}$.

При $\alpha \in [1,2]$: $M_{EinSS} = \{(\bar{x},0),(0,\bar{x}),(x^*,x^*),(\xi^+(x),x),(x,\xi^+(x)),\ x \in [\hat{x}, x^*]\}$.

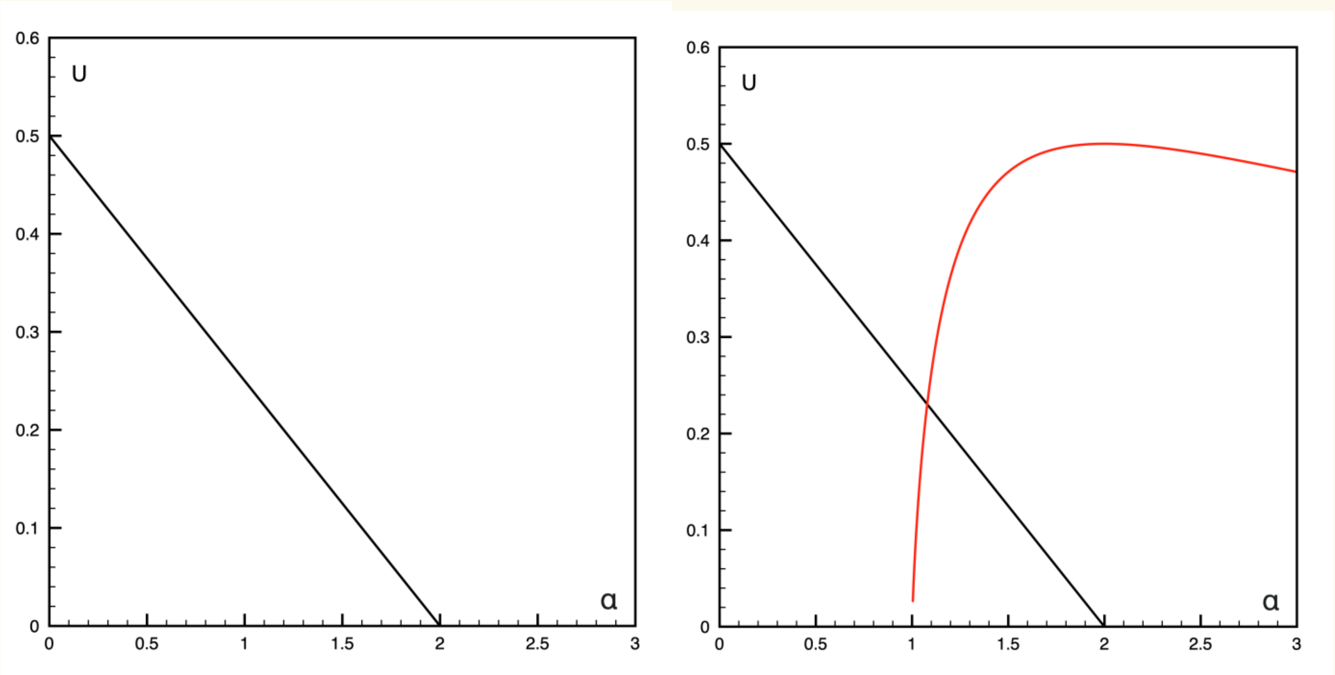
При $\alpha \in (2,\infty)$: $M_{EinSS} = \{(\bar{x},0),(0,\bar{x})\}$.

Здесь $\bar{x} = \dfrac{1}{\alpha}(\alpha-1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$, $\hat{x} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}$, $x^* = \dfrac{\alpha}{4}$.



Конкуренция за ренту : Выигрыши игроков в конкурентном и монопольном равновесиях

Институт Проблем Управления РАН



Выигрыши игроков конкурентном и монопольном равновесиях в зависимости от степенного параметра:

$$u^*(\alpha) = 0.5 - 0.25\alpha$$

$$\bar{u}(\alpha) = 1 - \bar{x} = 1 - \frac{1}{\alpha}(\alpha - 1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

Обзор задач: качественный вид РБС-решений

- Задача пространственной конкуренции Хотеллинга: в области несуществования РН решение непрерывно (но негладко) его продолжает, с более низкими равновесными ценами, чем по формуле Хотеллинга снижаясь до нулевых уровней в РН в нулевой точке; РБС существует всегда, как РН или как новое РБС решение.
- Задача конкуренции за ренту Таллока: появляется альтернативное (монополистическое) РБС-решение, вся область возможных значений параметров разбивается на 3 случая: существует только РН, существуют только монополистические РБС (для каждого игрока), два типа решений сосуществуют; таким образом РБС (как РН или монополистическое равновесие) существует всегда.
- Модель олигополии Бертрана-Эджворта: известное решение РН существует не всегда, то же решение как РБС существует на более широком множестве возможных значений параметров, но тоже не всегда.
- Модель конкуренции на рынке страхования Ротшильда-Стиглица-Вильсона: предложенные решения, RSW профили не всегда являются РН, но всегда РБС.

РБС и ОР-модели. Таблица Задачи-Равновесия

Институт Проблем Управления РАН

Модели равновесий	Метод решения	Хотеллинг	Таллок – Скапердас	Бертран – Эджворт	Ротшильд – Стиглиц – Вильсон
Равновесие Нэша в чистых стратегиях	Nash 1951, Dasgupta, Maskin 1986	Hotelling 1929, d'Aspremont, Gabszewicz, Thisse1979	Tullock1967, 1980, Skaperdas 1994	Bertrand 1883, Edgeworth 1925	Rothschild, Stiglitz 1976, Wilson 1977
Равновесие Нэша в смешанных стратегиях	Nash 1951, Dasgupta, Maskin 1986	Osborne, Pitchik 1987	Baye, Kovenock, de Vries 1993	Dixon 1984, Dasgupta, Maskin 1986, Allen, Hellwig 1986	(-)
Ad hoc решения	Привязан к задаче	Eaton, Lipsey 1979, Novshek 1980	(-)	d'Aspremont, Gabszewicz 1980	Wilson 1977, Riley 1979
Равновесие в угрозах и контругрозах	Iskakov, Iskakov, 2012	Sandomirskaia 2015	(-)	Sandomirskaia 2015	(-)
РБС	Iskakov, 2005	Iskakov, 2018	Iskakov, 2018	Iskakov, 2018	Iskakov, 2018

РБС и ОР-модели. Сравнение РБС с альтернативными решениями.

Модели	Вид решения	Преимущества	Недостатки	Сравнение РБС с данной моделью
Равновесие Нэша	(Абсолютная классика)	Универсальность, простота, теоретическая убедительность интерпретации	Не всегда существует	РБС существует для ряда важных задач без РН
Смешанные стратегии	В явном виде получить решение не всегда удается	Почти всегда существует	Большая сложность решения	Решение РБС простое, в рассмотренных задачах получено как простая аналитическая формула
Ad hoc решения	Решение предлагается для конкретной задачи	Адекватность решения постановке задачи, убедительная интерпретация	Неуниверсаль-ность решений, невозможность обобщения	Метод применим для широкого спектра задач с единой интерпретацией как рационального осторожного поведения

РБС и ОР-модели. Сравнение РБС с альтернативными решениями

Модели	Вид решения	Преимущества	Недостатки	Сравнение с РБС
Повторяю-щиеся игры, дальновид-ная рефлексия, угрозы и контругрозы	Большое множество возможных решений, например при стратегии наказания	Существование большого множества возможных решений	Достижимость любых решений из широкого множества снижает содержательную ценность	В рассмотренных задачах число решений 1-2 с точностью до перестановок игроков
Кооператив-ные и коали-ционные игры	Парето-, коллективно, коалиционно оптимальные решения	Коллективная оптимальность решений	Не для всех постановок задач применимо	Решения РБС предполагаются для рациональных, независимо и одновременно принимающих решение игроков. Выигрыши могут быть существенно ниже коллективно оптимальных

Основные результаты

- 1. Получен вывод определения РБС как развитие концепции РН
- 2. Получен метод построения теорем существования РБС на основе теорем существования РН
- 3. Метод построения теорем существования опробован на трех исходных теоремах: Дебре(1952), Рени(1999), Бика(2009)
- 4. Полученные теоремы существования РБС опробованы на задачах Хотеллинга, Таллока-Скапердаса, Бертрана-Эджворта. Найдены новые решения этих задач
- 5. Сравнительно с ОР-моделями рефлексивной динамики исследована новая ситуация осторожности, не рассчитывающая на последующее наказание, за счет 2-шаговой рефлексии
- 6. Модель РБС дает возможность ослабить традиционные предположения об одновременности принятия решений в игре с неопределенным инсайдером

Статьи в рецензируемых российских журналах:

1) Искаков М.Б. Равновесие в безопасных стратегиях. // Управление большими системами. Выпуск 9. М.: ИПУ РАН, 2004. С. 145 – 157.

2) Искаков М.Б. Равновесие в безопасных стратегиях. // Автоматика и телемеханика. 2005. №3. С. 139–153.

3) Искаков М.Б. Равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх. // Управление большими системами. Выпуск 15. 2006. С. 147-166.

4) Искаков М.Б. Равновесие в безопасных стратегиях и равновесия в угрозах и контругрозах в некооперативных играх. // Автоматика и телемеханика. 2008. №2. С. 114-134.

5) Искаков М.Б., Павлов П.А. Равновесие в безопасных стратегиях в модели пространственной конкуренции Хотеллинга. // Управление большими системами. Выпуск 26.1. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 187-318. // Математическая теория игр и ее приложения. Т.1, вып.2, 2009. С. 38-65.

6) Искаков М.Б., Искаков А.Б. Численное решение задачи Хотеллинга в безопасных стратегиях. // Управление большими системами. Выпуск 31. М.: ИПУ РАН, 2010. С.205-224.

7) Искаков М.Б., Искаков А.Б. Полное решение задачи Хотеллинга: концепция равновесия в безопасных стратегиях для игры определения цен. // Журнал новой экономической ассоциации. 2012. № 1 (13). С. 10-33.

8) Искаков А.Б., Искаков М.Б., Равновесия в безопасных стратегиях в ценовой дуополии Бертрана–Эджворта. // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. том 6, выпуск 2. С. 42–59.

9) Искаков М.Б., Искаков А.Б. Равновесие, сдерживаемое контругрозами, и сложное равновесие в безопасных стратегиях. // Управление большими системами. Выпуск 51. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 130-157.

10) Искаков А.Б., Искаков М.Б. Цепные равновесия в безопасных стратегиях. // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2016. Т.8, в.1. С. 80–105.

11) Искаков А.Б., Искаков М.Б. В поисках обобщенной концепции рациональности // Журнал новой экономической ассоциации. 2017. № 2 (34). С. 181-189.

12) Искаков М.Б. Теоремы существования равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях. // Журнал новой экономической ассоциации. 2022. № 4 (56). С. 12-27.

13) Искаков М.Б., Искаков А.Б. Равновесие в безопасных стратегиях как развитие концепции равновесия Нэша. // Математическая Теория игр и ее приложения. 2023. Т. 15, в. 1. с. 48-72.

Основные публикации

Институт Проблем Управления РАН

Статьи в рецензируемых журналах Wos/Scopus:

1) Iskakov M.B. Equilibrium in Safe Strategies. // Automation and Remote Control. 2005. Vol. 66, No.3. P. 465-478.
2) Iskakov M.B. Equilibrium in Safety Strategies and equilibriums in objections and counter objections in noncooperative games. // Automation and Remote Control. 2008. Vol. 69, No.2. P. 278-298.
3) Iskakov M., Iskakov A. Solution of the Hotelling's game in secure strategies. // Economics Letters. 2012. V. 117. P. 115–118.
4) Iskakov M.B., Iskakov A.B. Equilibria in secure strategies in the Bertrand–Edgeworth duopoly. // Automation and Remote Control. 2016, December. Volume 77, Issue 12. P. 2239–2248.
5) Iskakov A.B., Iskakov M.B. Chain equilibria in secure strategies. // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, No. 6, P. 1159–1172.
6) Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont C. Games for cautious players: the Equilibrium in Secure Strategies // Games and Economic Behavior. July 2018. Volume 110. P. 58-70.
7) Iskakov M.B., Iskakov A.B. Equilibrium in Secure Strategies as a Development of the Concept of Nash Equilibrium. // Doklady Mathematics. 2023. Vol. 108, Suppl. 1. P. S66–S74.

Основные публикации

Институт Проблем Управления РАН

Препринты:

1) Iskakov M., Iskakov A., Pavlov P. Solution of the Hotelling's Game in Secure Strategies. / Working paper WP7/2011/06/ National Research University "Higher School of Economics". – M: 2011. – 36 p.
2) Iskakov M., Iskakov A. Equilibrium in Secure Strategies — intuitive formulation. / Working paper WP7/2012/06 / National Research University "Higher School of Economics". – M: 2012. – 50 p.
3) Iskakov M., Iskakov A. Equilibrium in Secure Strategies. / CORE discussion paper 2012/61 Louvain-la-Neuve, Belgium. 2012. – 34 p.
4) Iskakov, M., Iskakov, A., Zakharov, A. Tullock Rent-Seeking Contest and its Solution in Secure Strategies. / Working paper WP7/2013/01 / National Research University "Higher School of Economics". – M: 2013. – 45 p.
5) Iskakov A., Iskakov M., Zakharov A. Equilibria in the Tullock Contest. / ECORE Discussion Paper 2014/33, Bruxelles: 2014 – 24 p.
6) Iskakov M., Iskakov A. Asymmetric equilibria in secure strategies. / Working paper WP7/2015/03 / National Research University Higher School of Economics. – M: 2015. – 48 p.
7) Iskakov M., Iskakov A., d'Aspremont C. Games for cautious players: the equilibrium in secure strategies. / CORE discussion paper 2016/51. Louvain-la-Neuve, Belgium. 2016. – 28 p.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ