ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Хлебников Михаил Владимирович

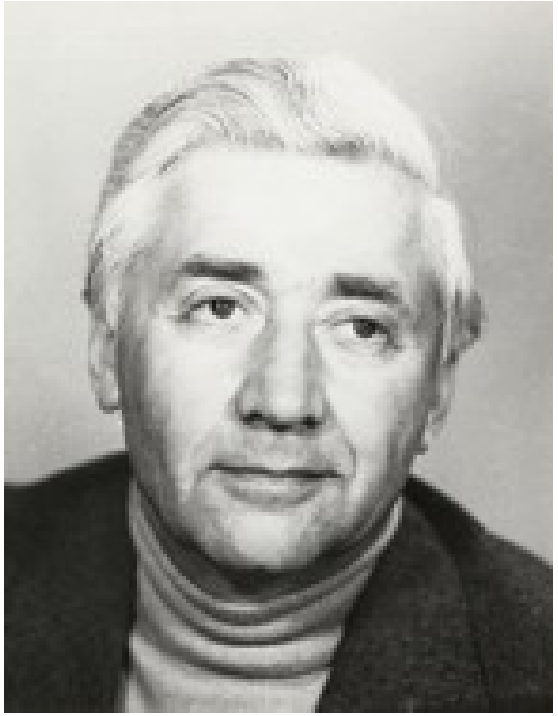
Лаборатория №7 ИПУ РАН

Москва, ИПУ РАН, 14 октября 2021 г.

ЛАБОРАТОРИЯ АДАПТИВНЫХ И РОБАСТНЫХ СИСТЕМ

Этап I: 1956–1997

- создана в 1956 г. академиком Я.З. Цыпкиным



- научные достижения Лаборатории в этот период связаны с
  - теорией импульсных, релейных, цифровых автоматических систем
  - теорией робастных и оптимальных алгоритмов адаптации
  - критериями абсолютной устойчивости (круговой критерий Цыпкина)
  - робастной устойчивостью (годограф Цыпкина-Поляка)
- списочный состав Лаборатории достигал 92 человек (1967 г.)
- сотрудниками лаб.7 были академики Н.А. Кузнецов, И.М. Макаров, Б.Н. Наумов, д.ф-м.н. М.А. Красносельский, Н.А. Бобылев, д.т.н. А.М. Петровский и др.

ЛАБОРАТОРИЯ АДАПТИВНЫХ И РОБАСТНЫХ СИСТЕМ

Этап II: 1998–2013

- в 1998 г. Лабораторию возглавил д.т.н. Б.Т. Поляк, ей присвоено имя Я.З. Цыпкина

- новые научные направления: теория робастного управления, синтез оптимальных регуляторов заданной структуры, задачи идентификации и адаптивного управления и др.
- с 2007 года функционирует молодежная научная школа Лаборатории
- постоянно действующий семинар по автоматическому управлению
- с 2009 г. усилиями сотрудников Лаборатории проводились ежегодные Всероссийские молодежные летние школы “Управление, информация и оптимизация”
- зарубежные коллеги — ученые мирового уровня: S. Boyd (США), A. Nemirovskii (США), А. Юдицкий (Франция), А. Поляков (Франция), R. Tempo (Италия), F. Dabbene (Италия), Ю. Нестеров (Бельгия), А. Позняк (Мексика) и др.

ЛАБОРАТОРИЯ АДАПТИВНЫХ И РОБАСТНЫХ СИСТЕМ

Этап III: 2013–...

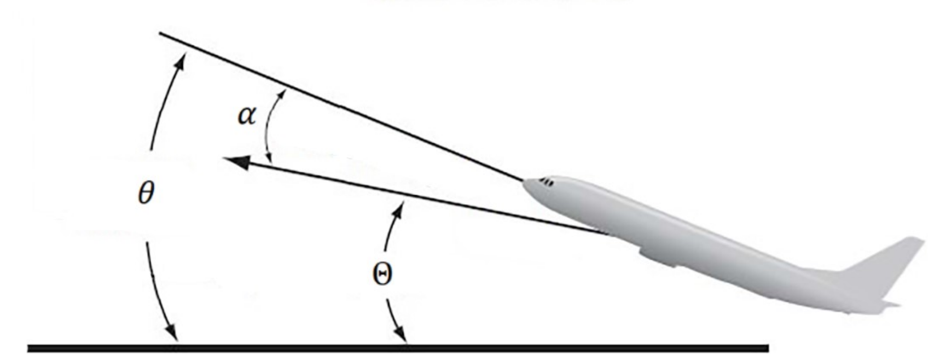
- с 2013 года Лабораторией руководит д.ф.-м.н. М.В. Хлебников. В 2016 году — 60-летие Лаборатории, в 2019 г. — 100-летие Я.З. Цыпкина, в 2020 г. — 85-летие Б.Т. Поляка

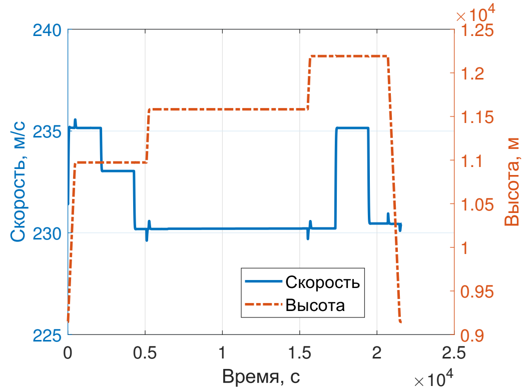
- основные задачи Лаборатории: продолжать традиции теоретических исследований ИАТа; следить за новейшими достижениями теории управления; привлекать молодежь

- основные направления исследований:
  - линейные системы (робастность, подавление внешних возмущений, исследование переходных процессов)
  - оптимизация (рандомизированные методы, многокритериальная оптимизация, связь со стабилизацией систем управления)
  - адаптивные регуляторы и их приложения
  - линейные матричные неравенства в системах управления (с 2006 г.)

ПРИКЛАДНЫЕ РАЗРАБОТКИ ЛАБОРАТОРИИ

- Управление ветряным генератором
- Бурение с контролируемым давлением
- Управление нагревом вязких нефтепродуктов на ж/д эстакадах
- Проекты по заказу ГосНИИАС (2020, 2021): на этапах набора высоты и крейсерского полета определить высотно-скоростной профиль полета, минимизирующий суммарный расход топлива





Александров В.А., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И., Тремба А.А., Хлебников М.В. Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна при фиксированном времени прибытия // АиТ. 2021. № 7. С. 69–85.

ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА (ЛМН)

Линейная система: $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ее устойчивость $(x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0)$ эквивалентна существованию квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}Qx\colon \quad V(x) > 0, \quad \dot{V}(x) < 0$$

Имеем: $\quad \dot{V}(x) = \frac{d}{dt}(x^{\mathrm{T}}Qx) = \dot{x}^{\mathrm{T}}Qx + x^{\mathrm{T}}Q\dot{x} = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}Q + QA)x < 0$

$\Longrightarrow$ неравенство Ляпунова

$$A^{\mathrm{T}}Q + QA \prec 0$$

- Теория устойчивости: А.М. Ляпунов (1892)
- Термин "матричные неравенства": В.А. Якубович (1962), задачи абсолютной устойчивости. "It is fair to say that Yakubovich is the father of the <LMI> field, and Lyapunov the grandfather" (С. Бойд)
- Численные методы (методы внутренней точки): Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский (1988). Задача может считаться решенной, если она сведена к ЛМН!
- Аппарат ЛМН позволил по-новому взглянуть на ряд задач теории управления. Более того, многие задачи до ее появления не имели решения

КВАДРАТИЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Система управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Цель: стабилизирующий регулятор $u = Kx$ по состоянию системы.

Функция

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} Q x, \quad Q \succ 0$$

является квадратичной функцией Ляпунова для замкнутой системы $\iff$

$$(A + BK)^{\mathrm{T}} Q + Q(A + BK) \prec 0$$

Домножим его слева и справа на матрицу $P = Q^{-1} \succ 0$:

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + BKP + PK^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \prec 0$$

Матричное неравенство нелинейно по K и P. Введем $Y = KP \implies$ ЛМН

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \prec 0, \quad P \succ 0$$

При этом

$$K = YP^{-1}$$

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЙ РЕГУЛЯТОР

- Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

Будем искать закон управления в форме линейной обратной связи по состоянию $u = Kx$, минимизирующий квадратичный критерий качества

$$J = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}} R x + u^{\mathrm{T}} S u)\, dt, \quad R, S \succ 0$$

- Стандартный метод решения задачи основан на рассмотрении алгебраического уравнения Риккати

$$A^{\mathrm{T}} Q + QA - QBS^{-1}B^{\mathrm{T}} Q + R = 0$$

При этом оптимальный регулятор дается выражением

$$K = -S^{-1} B^{\mathrm{T}} Q$$

а значение функционала J равно

$$J_{\mathrm{opt}} = x_0^{\mathrm{T}} Q x_0$$

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЙ РЕГУЛЯТОР: ЛМН-ПОДХОД

Применив для решения задачи о линейно-квадратичном регуляторе ЛМН-подход, приходим к следующему утверждению.

- *Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$ — решение задачи*

$$\min \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & P & Y^{\mathrm{T}} \\ * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & -S^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad \begin{pmatrix} \gamma & x_0^{\mathrm{T}} \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^{\mathrm{T}}$, Y и скалярной переменной γ. Тогда регулятор

$$\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$$

стабилизирует систему; при этом величина $x_0^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{-1}x_0$ определяет минимальное значение функционала на решениях системы с начальным условием x_0.

- Задача LQR сведена к формату полуопределенного программирования

- ЛМН-подход крайне полезен при решении робастной задачи LQR; в этом случае одним уравнением Риккати обойтись не удается

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

В задачах управления всегда приходится сталкиваться с неопределенностями!

Ключевые проблемы, связанные с неопределенностью:

- в описании системы $\Longrightarrow$ проблема робастности

$$\dot{x} = (A + \Delta)x + Bu$$

- во входах системы $\Longrightarrow$ проблема подавления внешних возмущений

$$\dot{x} = Ax + Dw(t) + Bu$$

Каковы $w(t)$?

- LQG-оптимизация — случайные гауссовские помехи
- H_∞-оптимизация — гармонические, L_2-ограниченные: $\int\limits_0^\infty \|w(t)\|^2 dt \leqslant \gamma$
- наиболее реальный случай — произвольные ограниченные

"проблема о накоплении возмущений" — Булгаков, 1946

"постоянно действующие возмущения" — Малкин, 1952

• Управление, построенное без учета внешних возмущений, может оказаться неудовлетворительным при их наличии

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ

Цель — построить обратную связь, в гарантированном смысле подавляющую воздействие внешних возмущений (при всех допустимых неопределенностях).

- Эллипсоидальное оценивание

А.Б. Куржанский[a], Ф.Л. Черноусько[b], F. Schweppe[c], D. Bertsekas[d]

- Аппарат линейных матричных неравенств

S. Boyd et al., 1994[e] (одна из первых монографий по ЛМН)

Д.В.Баландин, М.М.Коган, 2007[f] (первая монография по ЛМН на русском языке)

---

[a] *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[b] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.

[c] *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. NJ: Prentice Hall, 1973.

[d] *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 16. No. 2. P. 117–128.

[e] *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

[f] *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

ПОДХОДЫ К ПРОБЛЕМЕ

"Три кита":

- квадратичные функции Ляпунова
- аппарат линейных матричных неравенств
- метод инвариантных эллипсоидов

Достоинства:

- простота
- широкий спектр обобщений
- практическая реализуемость
- эффективные вычислительные методы и программы (SeDuMi[a], YALMIP[b], cvx[c] для системы MATLAB)

[a] *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones (updated for version 1.05). URL http://sedumi.ie.lehigh.edu/

[b] *Löfberg J.* YALMIP: Software for solving convex (and nonconvex) optimization problems. URL http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php

[c] *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming (web page and software). URL http://stanford.edu/~boyd/cvx

ПОДАВЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Анализ

Разомкнутая система:

$$\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = x_0$$
$$z = Cx$$

$x \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы

$z \in \mathbb{R}^l$ — выход

$w \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, измеримое по t и ограниченное в каждый момент времени:

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0$$

система устойчива (матрица A гурвицева)

пара (A, D) управляема

C — матрица полного ранга

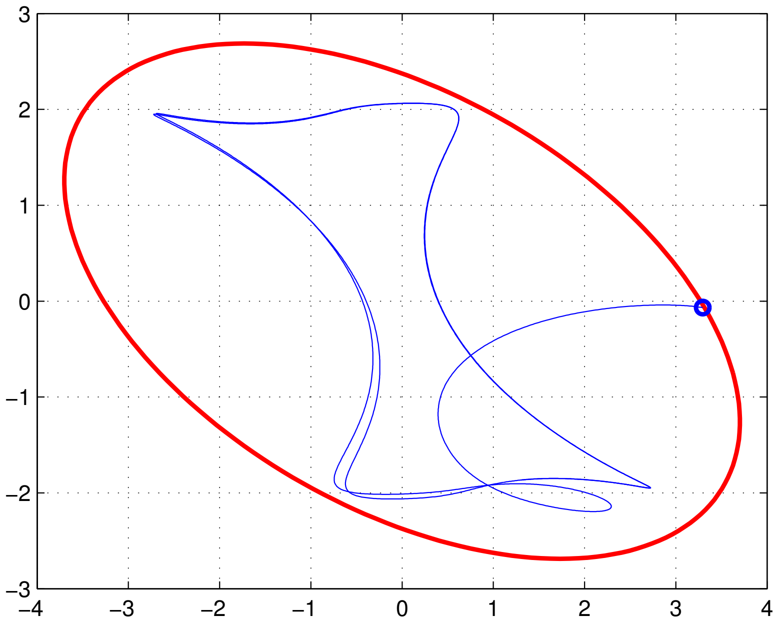
Инвариантные эллипсоиды

- Эллипсоид

$$\mathcal{E}_x = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0$$

называется инвариантным, если

$$x(0) \in \mathcal{E}_x \implies x(t) \in \mathcal{E}_x \text{ для всех } t \geqslant 0$$



- Свойство притягиваемости:

$$x(0) \notin \mathcal{E}_x \implies x(t) \to \mathcal{E}_x \text{ при } t \to \infty$$

- Выход $z = Cx$ при $x(0) \in \mathcal{E}_x$ принадлежит ограничивающему эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \left\{z \in \mathbb{R}^l\colon \quad z^{\mathrm{T}} (CPC^{\mathrm{T}})^{-1} z \leqslant 1\right\}$$

а при $x(0) \notin \mathcal{E}_x$ стремится к нему

- В случае скалярного выхода $\mathcal{E}_z$ — отрезок
- Задача: найти минимальный инвариантный/ограничивающий эллипсоид

Анализ: основной результат

Теорема [S. Boyd]. $\mathcal{E}_x$ — *инвариантный эллипсоид для системы* $\dot{x} = Ax + Dw$ $\iff$ *его матрица* $P \succ 0$ *удовлетворяет ЛМН*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} \preccurlyeq 0 \quad \text{\textit{при некотором}}\ \alpha > 0$$

Идея доказательства — построение квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^{\mathrm{T}} P^{-1} x, \quad P \succ 0$$

обладающей необходимыми свойствами против допустимых внешних возмущений.

Математический аппарат — S-процедура с двумя ограничениями (Поляк, 1998).

Следствие. *Минимальный инвариантный эллипсоид принадлежит однопараметрическому семейству, порожденному решениями* $P(\alpha)$ *уравнения Ляпунова*

$$AP + PA^{\mathrm{T}} + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^{\mathrm{T}} = 0 \quad \text{\textit{при}}\ \ 0 < \alpha < -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$$

При этом функция $\varphi(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^{\mathrm{T}}$ *строго выпукла на указанном интервале.*

Polyak B.T. Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // Journal on Optimization Theory and Applications. 1998. V. 99. No. 3. P. 553–583.

СИНТЕЗ

Система управления:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw, \quad x(0) = x_0$$
$$z = Cx + B_1 u$$

x — состояние системы, z — регулируемый выход, w — ограниченное внешнее возмущение, u — управление

Цель — найти стабилизирующую линейную обратную связь, оптимально (в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида) подавляющую воздействие внешних возмущений.

- Исходная задача сведена к простой задаче выпуклой оптимизации
- Несложная формулировка, простота реализации
- Результаты распространены на случай системных неопределенностей:

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu + Dw, \quad \|\Delta\| \leqslant \gamma$$

Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 11. С. 9–59.

ОБОБЩЕНИЯ И ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

- фильтрация
- дискретное время
- разреженное управление
- линейный динамический регулятор
- обобщения на нелинейные системы
- учет неопределенностей в регуляторе
- управление по выходу с помощью наблюдателя
- минимизация отклонений в системах управления
- учет ограничений на управление и фазовое состояние
- ...

НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ:
СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

- В последнее время стал очень популярным подход к линейным системам управления с точки зрения оптимизации. Например, классическую задачу о линейно-квадратичном регуляторе можно рассматривать как задачу оптимизации, где переменной является матрица обратной связи, а минимизируется интегральный квадратичный показатель качества переходного процесса. Вместе с тем, обоснование подобных методов появилось лишь недавно.

- Мы впервые применяем аналогичный подход к задачам с внешними возмущениями: разработан новый эффективный алгоритм однопараметрической оптимизации (основанный на технике инвариантных эллипсоидов) для задачи анализа.

- Это позволило записать задачу синтеза регулятора, оптимально подавляющего помехи, как задачу невыпуклой матричной оптимизации. Была исследована возникающая при этом функция, вычислен ее градиент, дана формулировка и обоснование итеративного алгоритма оптимизации.

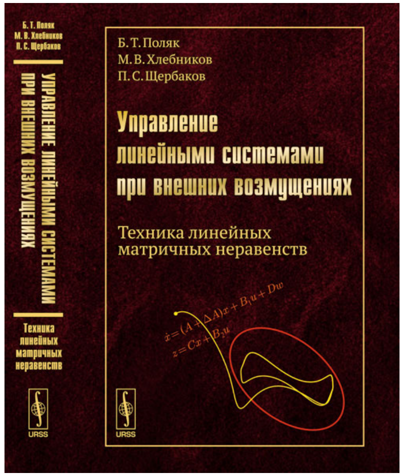
Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.

ПУБЛИКАЦИИ

- *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: URSS/ЛЕНАНД, 2014 (удостоена Премии Президиума РАН имени Б.Н. Петрова)

- *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: URSS/ЛЕНАНД, 2019

- *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью (обзор) // Автоматика и телемеханика. 2021. № 1. С. 3–54.



Спасибо за внимание!